

# Aerodynamisk stabilitet av lange slanke hengebruer

**Magne Eilif Lie Gilberg**

Bygg- og miljøteknikk

Innlevert: juni 2013

Hovedveileder: Einar Norleif Strømmen, KT

Medveileder: Kristian Berntsen, Vegdirektoratet  
Bjørn Isaksen, Vegdirektoratet

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
Institutt for konstruksjonsteknikk





## MASTEROPPGAVE 2013

FAGOMRÅDE: Dynamikk, aerodynamisk stabilitet	DATO: 11. juni 2013	ANTALL SIDER: 108 (92+16)
---	------------------------	------------------------------

TITTEL:

**Aerodynamisk stabilitet av lange slanke hengebroer**

Aerodynamic stability of slender suspension bridges

UTFØRT AV:

Magne Eilif Lie Gilberg

SAMMENDRAG:

Planlegging av nye og effektive transportveier øker etterspørselen etter å krysse bredere fjorder og høyere fjell. Dette fører til at broer må sette nye lengderekorder og at ny teknologi må utvikles. Dagens hengebroer begrenses av stabilitetsproblemer ved høye vindhastigheter, såkalt flutter. Denne masteroppgaven undersøker mulighetene for å øke stabilitetsgrensen til hengebroer ved å installere en passiv massedemper. Massedempere har tidligere vist seg å være meget effektive til å dempe dynamiske svingninger på grunn av vindlaster på både høyhus og broer.

Arbeidet er utført som en teoretisk studie hvor det er utviklet en beregningsmetode som deretter er prøvd på to broeksempler, en fiktiv brokonstruksjon fra boka "Theory of Bridge Dynamics" av Strømmen (2010) og Hardangerbroa, Norges lengste hengebro som åpner i løpet av 2013.

Beregningen av kritisk vindhastighet er basert på en modal analyse. Kun de to modene som bidrar til flutter-ustabiliteten er inkludert i beregningen. Dynamisk respons beregnes ved å øke middelvindhastigheten skrittvis helt til responsen øker mot uendelig. Beregningen inkluderer bevegelsesinduserte krefter, vind- og turbulenslaster og massedemperens effekt. Tilslutt er det utført en parameterstudie som inkluderer massedemperens masseforhold og egenfrekvens.

En massedemper er egnet til å øke den aerodynamiske stabilitetsgrensen til hengebroer. Resultatene viser at en massedemper øker kritisk vindhastighet betydelig for den fiktive broa. Kritisk vindhastighet øker også for Hardangerbroa, men i mindre grad. Parameterstudien viser at optimal verdi for egenfrekvensen er viktig for effektiv utnyttelse av massedemperen. Det er knyttet usikkerhet til beregninger av responsfrekvenser ved kritisk vindhastighet. Et lite avvik mellom beregnet og virkelig verdi kan redusere effekten av massedemperen betydelig. For at massedemperen skal bli mer robust mot avvik i responsfrekvensen er det foreslått å benytte flere mindre massedempere med ulike egenfrekvenser.

FAGLÆRER: Einar Strømmen (NTNU)

VEILEDER(E): Einar Strømmen

UTFØRT VED: Institutt for konstruksjonsteknikk





# MASTEROPPGAVE 2013

## Konstruksjonsteknikk

for

Magne Eilif Lie Gilberg

### AERODYNAMISK STABILITET AV LANGE SLANKE HENGEBRUER

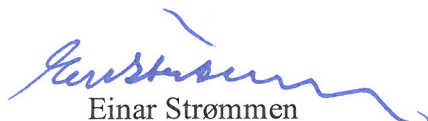
#### *Aerodynamic stability of slender suspension bridges*

I Norge er det for tiden under planlegging og bygging en rekke meget slanke brukonstruksjoner, for eksempel Hardangerbroen som er en klassisk hengebro og Hålogalandsbroen som er under utredning i to alternative utgaver, ett alternativ som en vanlig hengebro og et annet i form av den såkalte "Brusymfonien". Begge har hovedspenn på betydelig mer enn 1000 m. De er svært utsatt for den dynamiske lastvirkningen fra vind, men begge er håndterbare innenfor dagens teknologi. Det er imidlertid også under utredning en kryssing av Sognefjorden som innebærer en bro med spenn på opp til tre kilometer, og i dette tilfellet er det usikkert i hvilken grad man vil være i stand til å oppnå en konstruktiv utførelse med tilfredsstillende aerodynamisk egenskaper. Det har i den forbindelse blitt foreslått å undersøke muligheten for addere dempning til systemet ved hjelp av en eller flere massedempere. Hensikten med denne oppgaven er nettopp å se på mulige utførelser av fjordkryssinger i denne spennvidden, hvor det legges spesiell vekt på å undersøke i hvilken grad massedempere (TMD) kan bidra. Arbeidet foreslås lagt opp etter følgende plan:

1. Studenten setter seg inn i teorien for hengebroens virkemåte (men det er ikke hensikten at dette skal munne ut i en omfattende utredning).
2. Studenten setter seg inn i teorien for aerodynamisk stabilitet av slanke broer, spesielt med hensyn til koblete vertikal- og torsjonssvingninger, dvs. "flutter" (se *Strømmen: Theory of bridge aerodynamics, Springer 2006*).
3. For en eller flere aktuelle utførelser (avtales med veileder og Sivilingeniør K. Berntsen i Vegdirektoratet) skal det foretas en utredning med sikte på å kvantifisere de viktigste mekaniske egenskapene (dvs. aktuelle masse- og stivhetsegenskaper). Basert på regnemaskinprogrammet Alvsat skal det deretter foretas beregninger av de aktuelle egenfrekvensene og tilhørende egensvingeformene som er avgjørende for stabilitetsgrensen. (I den grad tiden tillater det skal disse beregningene utføres i form av et parameterstudium.)
4. For tilfellene som er behandlet under punkt 3 skal det foretas beregninger av stabilitetsgrensen. Beregningen skal baseres på en mest mulig generell teori (se punkt 2 ovenfor) og en løsning i Matlab.
5. For det samme tilfellet skal det foretas en undersøkelse i hvilken grad en eller flere massedempere vil kunne forbedre de dynamiske egenskapene til systemet.

Studenten kan selv velge hvilke problemstillinger han ønsker å legge vekt på. Oppgaven skal gjennomføres i samarbeid med Siv.ing. Kristian Berntsen og Dr.ing. Bjørn Isaksen i Vegdirektoratet.

NTNU, 2013-01-03



Einar Strømmen



## Sju vindar

Sju vindar, sju vindar  
sulla og song.  
Sju vindar, sju vindar  
fann himmelen trong.

Sju vindar, sju vindar  
møttest i kast.  
Då vart det runddans,  
då rauk det kvast!

Sju vindar, sju vindar  
skilde lag.  
Og alle vindar  
sov i dag.

Olav H. Hauge (1956)



# Forord

Denne masteroppgaven er det avsluttende arbeidet i min sivilingeniørutdanning på studieprogrammet Bygg- og miljøteknikk ved Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet (NTNU) i Trondheim. Oppgaven er skrevet ved Institutt for konstruksjonsteknikk i samarbeid med Vegdirektoratet. Hovedveileder har vært professor Einar Strømmen ved NTNU og kontaktperson i Vegdirektoratet har vært dr.ing. Bjørn Isaksen.

Oppgaven omhandler aerodynamisk stabilitet for hengebroer og hvordan en massedemper kan bidra til å øke kritisk vindhastighet for flutter. Oppgaveformuleringen ga frihet til å vektlegge ulike problemstillinger innenfor punktene gitt i oppgaveteksten. I tillegg til å studere relevant teori (punkt 1 og 2) har jeg valgt å vektlegge implementering av massedemperen i beregningen av kritisk vindhastighet og deretter bestemme massedemperens optimale egenskaper (punkt 4 og 5). Overslagsdimensjonering og beregning av egenfrekvenser (punkt 3) er ikke vektlagt. Det er derfor antatt at de nødvendige mekaniske egenskapene til brokonstruksjonen er kjent.

Jeg vil takke min hovedveileder, professor Einar Strømmen, for motiverende veiledning og god hjelp gjennom hele semesteret. Hans utgangspunkt, om at studentene først og fremst skal lære mest mulig gjennom arbeidet med masteroppgaven, har jeg satt stor pris på. Digresjonene og historiene har også inspirert meg.

Tilslutt vil jeg gi en takk til Karoline, fordi du er den du er.

Trondheim, 10. juni 2013

Magne Gilberg



# Sammendrag

Planlegging av nye og effektive transportveier øker etterspørselen etter å krysse bredere fjorder og høyere fjell. Dette fører til at broer må sette nye lengderekorder og at ny teknologi må utvikles. Dagens hengebroer begrenses av stabilitetsproblemer ved høye vindhastigheter, såkalt flutter. Denne masteroppgaven undersøker mulighetene for å øke stabilitetsgrensen til hengebroer ved å installere en passiv massedemper. Massedempere har tidligere vist seg å være meget effektive til å dempe dynamiske svingninger på grunn av vindlaster på både høyhus og broer.

Arbeidet er utført som en teoretisk studie hvor det er utviklet en beregningsmetode som deretter er prøvd på to broeksempler, en fiktiv brokonstruksjon fra boka "Theory of Bridge Dynamics" av Strømmen (2010) og Hardangerbroa, Norges lengste hengebro som åpner i løpet av 2013.

Beregningen av kritisk vindhastighet er basert på en modal analyse. Kun de to modene som bidrar til flutter-ustabiliteten er inkludert i beregningen. Dynamisk respons beregnes ved å øke middelwindhastigheten skrittvis helt til responsen øker mot uendelig. Beregningen inkluderer bevegelsesinduserte krefter, vind- og turbulenslaster og massedemperens effekt. Tilslutt er det utført en parameterstudie som inkluderer massedemperens masseforhold og egenfrekvens.

En massedemper er egnet til å øke den aerodynamiske stabilitetsgrensen til hengebroer. Resultatene viser at en massedemper øker kritisk vindhastighet betydelig for den fiktive broa. Kritisk vindhastighet øker også for Hardangerbroa, men i mindre grad. Parameterstudien viser at optimal verdi for egenfrekvensen er viktig for effektiv utnyttelse av massedemperen. Det er knyttet usikkerhet til beregninger av responsfrekvenser ved kritisk vindhastighet. Et lite avvik mellom beregnet og virkelig verdi kan redusere effekten av massedemperen betydelig. For at massedemperen skal bli mer robust mot avvik i responsfrekvensen er det foreslått å benytte flere mindre massedempere med ulike egenfrekvenser.





# Abstract

The demand for new and more efficient transportation routes increases the need for crossing of wider fiords and higher mountains. This results in bridges having to set new records of length and new technology to be developed. The length of today's suspension bridges is limited by stability problems at high wind velocity, so called flutter. This master thesis investigates the possibilities to increase the limit of aerodynamic stability of suspension bridges, by installing a tuned mass damper. Tuned mass dampers have shown to be highly efficient for decreasing fluctuations due to wind load on high-rise buildings and bridges.

The work is performed as a theoretical study where a calculation method is developed and tested on two example bridges. One is a fictive bridge construction from the book "Theory of Bridge Dynamics" by Strømmen (2010) and the other bridge is the Hardanger Bridge, Norway's longest suspension bridge, which is opening this year.

The calculation of critical wind velocity is based on a modal analysis. Only the two modes that contribute to the flutter instability are included in the calculation. Dynamic response is calculated in stages as the mean wind velocity is increased, until the response increases towards infinity. The calculation includes motion-induced loads, wind- and turbulence loads and the effect of the tuned mass damper. Finally, a parameter study is performed. This includes the tuned mass damper's mass ratio and its natural frequency.

A tuned mass damper is suitable for increasing the limit of aerodynamic stability for suspension bridges. The results show that a tuned mass damper significantly increases the critical wind velocity for the fictive bridge. The critical wind velocity also increases for the Hardanger Bridge, but to a lesser extent. The parameter study shows that the optimal value for the tuned mass damper's natural frequency is important for an efficient utilization of the tuned mass damper. There is uncertainty associated with calculations of the response frequency at critical wind velocity. A small deviation between the calculated and real value can reduce the effect of the tuned mass damper significantly. To improve the resilience against small deviations in the response frequency, it is suggested to use several smaller tuned mass dampers with different natural frequency.



# Innhold

<i>Forord</i> .....	<i>III</i>
<i>Sammendrag</i> .....	<i>V</i>
<i>Abstract</i> .....	<i>VII</i>
<i>Figurer</i> .....	<i>XI</i>
<i>Tabeller</i> .....	<i>XIII</i>
<i>Symboler</i> .....	<i>XV</i>
<i>1 Innledning</i> .....	<i>1</i>
<i>2 Grunnleggende teori</i> .....	<i>7</i>
2.1 Generelle antagelser og definisjon av aksesystemer.....	7
2.2 Dynamisk likevekt og modal analyse .....	9
2.3 Massedemperens virkemåte .....	18
<i>3 Vindlaster</i> .....	<i>21</i>
3.1 Vindstatistikk.....	21
3.2 Buffeting teorien .....	27
<i>4 Dynamisk analyse for aerodynamisk stabilitet</i> .....	<i>35</i>
<i>5 Resultater og diskusjon</i> .....	<i>55</i>
5.1 Broene.....	55
5.2 Massedemperens effekt på aerodynamisk stabilitet.....	60
5.3 Egenfrekvensens sensitivitet.....	68
<i>6 Konklusjon og videre arbeid</i> .....	<i>71</i>
6.1 Konklusjon .....	71
6.2 Forslag til videre arbeid .....	72
<i>7 Referanser</i> .....	<i>73</i>
<i>8 Vedlegg</i> .....	<i>75</i>
A Hovedskript Matlab	
B Matlabfunksjon AD_funk.m	
C Matlabfunksjon jaf_funk.m	
D Matlabfunksjon phi_funk.m	



# Figurer

Figur 1-1: Torsjonsflutter som førte til kollaps av Tacoma Narrows Bridge.....	3
Figur 1-2: Tverrsnitt av brobanen til Hardangerbroa. Et eksempel på et strømlinjeformet kassetverrsnitt med gode aerodynamiske egenskaper. ....	3
Figur 2-1: Fenomener som er opphav til dynamisk respons for en slank konstruksjon.....	7
Figur 2-2: Definisjon av akser for vindstrømmen og konstruksjon. ....	8
Figur 2-3: Kontinuerlig bjelkelignende system.....	9
Figur 2-4: Frilagt legeme i likevekt etter d'Alembert's prinsipp for et bjelkeelement.....	10
Figur 2-5: Enkel konstruksjon ( $M_1$ ) med massedemper ( $M_2$ ). ....	18
Figur 2-6: Frekvens-respons-funksjonen til en enkel konstruksjon med en massedemper .....	20
Figur 3-1: Momentan vindhastighet og vindprofil for middelvindhastighet og turbulens.....	21
Figur 3-2: To samtidige målinger av u-komponenten til turbulensen.....	23
Figur 3-3: Covarians koeffisienten som funksjon av separasjon.....	24
Figur 3-4: Illustrasjon av de karakteristiske lengdene.....	24
Figur 3-5: Forskyvninger og strømning rundt tverrsnittet. ....	28
Figur 4-1: Øverste figur viser vertikal frihetsgrad, $r_z$ . Nederste figur viser frihetsgrader for rotasjon, $r_\theta$ , og massedemper, $r_d$ , samt relativ frihetsgrad for massedemperen, $\Delta r_d$ .....	36
Figur 4-2: Ytre og indre krefter for vertikal egensvingeform fra d'Alembert's prinsipp .....	37
Figur 4-3: Massekrefter som virker på TMD og krefter mellom TMD og brobane fra d'Alembert's prinsipp.....	37
Figur 4-4: Krefter mellom massedemperen og brobanen.....	38
Figur 5-1: Egensvingeformer for fiktiv bro.....	56
Figur 5-2: Egensvingeformer for Hardangerbroa.....	56
Figur 5-3: Auto-spektraltetthet for turbulenskomponent $w$ .....	57
Figur 5-4: Co-spektrum for turbulenskomponent $w$ .....	57

Figur 5-5: Aerodynamisk deriverte for Hardangerbroa og den fiktive broa .....	58
Figur 5-6: Standardavvik av dynamisk respons (vertikal forskyvning og rotasjon) for midtpunktet til fiktiv bro. ....	59
Figur 5-7: Standardavvik av dynamisk respons (vertikal forskyvning og rotasjon) for midtpunktet til Hardangerbroa. ....	59
Figur 5-8: Standardavvik av dynamisk respons (rotasjon) for midtpunkt på fiktiv bro med massedemper. ....	61
Figur 5-9: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgraden. Fiktiv bro uten massedemper .....	62
Figur 5-10: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgrad. Fiktiv bro med massedemper .....	62
Figur 5-11: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgrad. Fiktiv bro med større massedemper .....	62
Figur 5-12: Standardavviket av dynamisk respons (rotasjon) for midtpunkt av Hardangerbroa med en massedemper. ....	63
Figur 5-13: Massedemperens prosentvise økning av kritisk vindhastighet ved parametervariasjon av $\omega_d$ og $\mu$ for fiktiv bro .....	65
Figur 5-14: Massedemperens prosentvise økning av kritisk vindhastighet ved parametervariasjon av $\omega_d$ og $\mu$ for Hardangerbroa.....	65
Figur 5-15: Effektiviteten av massedemper på fiktiv bro med egenfrekvens, $\omega_d$ =1.55 rad/s, for ulike verdier av $\mu$ .....	67
Figur 5-16: Effektiviteten av massedemper på Hardangerbroa med egenfrekvens, $\omega_d$ =1.1 rad/s, for ulike verdier av $\mu$ .....	67
Figur 5-17: Egenfrekvensenes endring ved økende middelvindhastighet på grunn av bevegelsesinduserte krefter .....	69

# Tabeller

Tabell 5-1: Konstruksjonsegenskaper for fiktiv bro.....	55
Tabell 5-2: Konstruksjonsegenskaper for Hardangerbroa .....	55
Tabell 5-3: Lastkeffisienter og turbulensparametre for fiktiv bro .....	57
Tabell 5-4: Lastkoefisienter og turbulensparametre for Hardangerbroa .....	57
Tabell 5-5: Oppsummering av optimale parametere for massedemperens påvirkning på kritisk middelvindhastighet.....	66





# Symboler

## **Matriser og vektorer:**

Matriser er generelt skrevet i fete blokkbokstaver, f.eks. **K** or **Φ**.

Vektorer er generelt skrevet i fete små bokstaver, f.eks. **q** or **φ**.

*diag[.]* angir en diagonal matrise.

*det(·)* angir determinanten av matrisen.

## **Opphøyede tegn og tegn over symboler:**

Opphøyet tegn *T* angir den transponerte av en vektor eller matrise.

Opphøyet tegn *\** angir den kompleks-konjugerte av en vektor eller matrise.

Prikker over symbolet (f. eks.  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ) angir tidsderivert, dvs.  $d/dt$ ,  $d^2/dt^2$ .

Apostrof ved symbolet (f. eks.  $C'_L$  or  $\phi'$ ) angir derivert mhp relevant variabel,

f. eks.  $\phi' = d\phi/dx$ . To apostrofer er andrederivert (f. eks.  $\phi'' = d^2\phi/dx^2$ ) osv.

Strek (–) over en variabel (f. eks.  $\bar{r}$ ) angir tidsuavhengig gjennomsnittsverdi.

Tilde (˜) over et symbol (f. eks.  $\tilde{M}_n$ ) angir en modal størrelse.

Hatt (^) over et symbol (f. eks.  $\hat{H}_\eta$ ) angir en normalisert størrelse.

## **Forkortelser:**

CC og SC er forkortelser for tverrsnittssenter (massesenter) og skjærsenter.

*tot* er forkortelse for total.

*ae* er forkortelse for aerodynamisk.

*rel* er forkortelse for relativ.

*cr* er forkortelse for kritisk.

## **Latinske bokstaver:**

*A* Tverrsnittsareal

$A_1^* - A_6^*$  Aerodynamisk deriverte tilknyttet torsjonsbevegelse.

*a* Fourierkoeffisient, amplitude.

$\mathbf{a}_j$  Vektor av fourierkoeffisient tilhørende variabel *j*

*B* Tverrsnittsbredde

$\mathbf{B}_q$  Buffeting-last koeffisient matrise

*c* Co-spektrumkoeffisient, dempningskoeffisient for tverrsnitt

$C, \mathbf{C}$	Dempningsparameter, matrise med dempningsparametre
$C_{ae}, \mathbf{C}_{ae}$	Aerodynamisk dempning, aerodynamisk dempningsmatrise
$C_D, C_L, C_M$	Lastkoeffisienter for drag-, løft- og momentlaster.
$Co, \mathbf{Co}$	Co-spektraltetthet, co-spektraltetthetsmatrise
$\mathbf{Cov}_j$	Covarians matrise tilhørende variabel $j$
$d$	Indeks som angir tilknytning til massedemper
$E$	Elastisitetsmodul
$F$	Punktlast
$G$	Skjærmodul
$H_1^* - H_6^*$	Aerodynamisk deriverte tilknyttet vertikal bevegelse
$H_n, \mathbf{H}_r$	Frekvens-respons-fuksjon, frekvens-responsmatrise
$I_t$	St Venant torsjonskonstant
$I_j$	Turbulensintensitet for komponent $j = u, v$ eller $w$
$I_y, I_z$	Andre arealmoment for bøyning om $y$ og $z$ akse
$\mathbf{I}$	Identitetsmatrisen
$i$	Imaginært tall (f. eks. $i = \sqrt{-1}$ ), indeksvariabel for moder
$J^2$	Joint acceptance function
$j$	Indeksvariabel for moder
$K, \mathbf{K}$	Stivhet, stivhetsmatrise
$K_{ae}, \mathbf{K}_{ae}$	Aerodynamisk stivhet, aerodynamisk stivhetsmatrise
$L$	Lengde av brospenn
$^sL_n$	Karakteristiske lengder ( $s = x_f, y_f$ , eller $z_f$ , $n = u, v$ eller $w$ )
$M_m, M_x$	Bøyemoment om gitt akse ( $m = y, z$ ), torsjonsmoment
$m, \mathbf{M}$	Fordelt masse, massematrise
$\tilde{m}_n$	Jevnt fordelt ekvivalent modal masse
$\tilde{M}_j$	Modal masse tilhørende mode $j = z, \theta, d$
$N$	Tellenummer
$N_x, N_y$	Normalkrefter (tverrsnittskrefter)
$P_1^* - P_6^*$	Aerodynamisk deriverte tilknyttet horisontal bevegelse
$q, \mathbf{q}$	Fordelt last, fordelt lastvektor
$R, \mathbf{R}$	Eksterne laster på systemnivå, ekstern lastvektor
$\tilde{R}, \tilde{\mathbf{R}}$	Modale laster, Modal lastvektor
$r, \mathbf{r}$	Tverrsnittsforskyvning eller -rotasjon, forskyvningsvektor
$S, \mathbf{S}$	Auto- eller cross- spektraltetthet, cross-spektraltetthetsmatrise
$t, T$	Tidsvariabel, lengde av tidsvindu
$u$	Turbulenskomponent i retning av middelvind, $x_f$
$V$	Middelvindhastighet
$V_y, V_z$	Skjærkrefter (tverrsnittskrefter)
$v$	Turbulenskomponent horisontalt og normalt på middelvind, $y_f$
$w$	Turbulenskomponent vertikal retning, $z_f$
$\tilde{w}$	Vilkårlig vektingsfunksjon
$x_f, y_f, z_f$	Kartesiske koordinater for vindfeltet

$x, y, z$	Kartesiske koordinater for tverrsnitt (origo er i skjærsenteret, $x$ er lengderetningen til konstruksjonen og $z$ er vertikal)
$z$	Indeks som angir vertikal mode eller tilknytning til vertikal mode

**Greske bokstaver:**

$\alpha$	Angrepsvinkel for luftstrøm
$\beta$	Vinkel for luftstrøm
$\zeta$ or $\boldsymbol{\zeta}$	Strukturelt dempningsforhold or dempningsforholdsmatrise
$\zeta_{ae}$	Aerodynamisk dempningsbidrag i respons-frekvens-matrisen
$\eta, \boldsymbol{\eta}$	Modale frihetsgrader, modal frihetsgradvektor
$\theta$	Indeks som angir torsjonsbevegelse eller tilknytning til torsjon.
$\kappa_{ae}$	Aerodynamisk stivhetsbidrag i respons-frekvens-matrisen
$\mu$	Masseforhold for massedemper
$\boldsymbol{\mu}$	Massedemperens bidrag i respons-frekvens-matrisen
$\rho$	Tetthet til luft
$\sigma, \sigma^2$	Standardavvik, varians
$\sigma_x, \tau$	Normalspenning, Skjærspenning
$\varphi_y, \varphi_z, \varphi_\theta$	Kontinuerlig egensvingeform for $y$ , $z$ og $\theta$
$\boldsymbol{\varphi}_i$	Modevektor
$\boldsymbol{\Phi}$	Matrise som inneholder alle modevektorene $\boldsymbol{\varphi}_i$
$\boldsymbol{\Psi}$	Transformasjonsmatrise for relative frihetsgrader
$\omega$	Vinkelfrekvens (rad/s)
$\omega_i$	Eigenfrekvens tilhørende mode nummer $i$
$\omega_i(V)$	Eigenfrekvens tilh. mode nummer $i$ ved middelvindhastighet $V$

**Symboler med både latinske og greske bokstaver:**

$\Delta s$	Romlig separasjon ( $s = x_f, y_f$ eller $z_f$ )
$\delta r$	Vilkårlig virtuell forskyvning



# 1 Innledning

Samfunnet etterspør stadig flere og mer effektive transportmuligheter. Fjell og fjorder er barrierer som utfordrer teknologien og skaper nye mål som må overvinnes. Over fjorder, hvor det før var utenkelig å bygge bro, utredes nå mulighetene for å konstruere nye fjordkrysninger. I Norge pågår for tiden arbeidet med å planlegge en fergefri hovedvei langs kysten fra Kristiansand til Trondheim (Statens vegvesen 2013b). Prosjektet omfatter flere broer med spenn på opp til 3700 m. En av hovedutfordringene med å bygge hengebroer med så lange spenn er aerodynamisk stabilitet.

En konstruksjon mister sin stabilitet når responsen øker ubegrenset selv ved en liten økning av belastningen. Søyleknekking er et kjent eksempel på et stabilitetsproblem fra statikken. For broer utsatt for vindbelastning vil en liten økning av vindhastigheten kunne gi en stor økning av statisk eller dynamisk respons. Det er de bevegelsesinduserte kreftene, også kalt aerodynamiske krefter, som forårsaker stabilitetsproblemene. En bevegelse – forskyvning eller rotasjon – av brobanen vil føre til at tverrsnittet påvirkes av endrede vindlaster. Det er endringen av vindlastene som er de bevegelsesinduserte kreftene. De kan både øke og redusere den totale lasten på brobanen. Økes lasten kan det gi enda større forskyvning eller rotasjon og en ustabilitet kan oppstå. Det er vanlig å beskrive dette ved at den effektive stivheten til systemet reduseres. Tilsvarende kan forekomme for dempningskreftene som er proporsjonale med hastigheten til forskyvning og rotasjon av brobanen. Bevegelsen til brobanen kan da føre til at den effektive dempningen til systemet reduseres som også er opphav til ustabilitet.

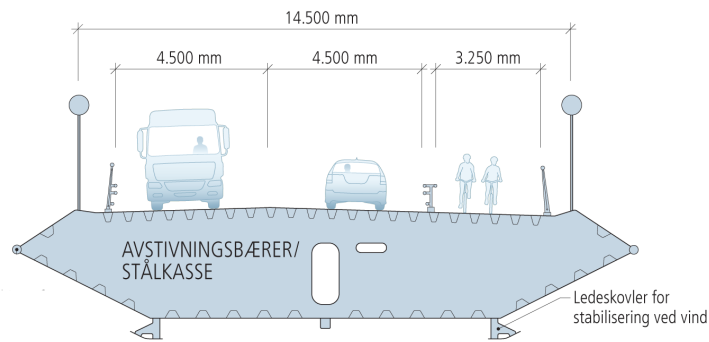
Stabilitetsfenomenet kan deles inn i fire forskjellige typer etter hvordan responsen utvikler seg (Strømmen 2010):

- Statisk divergens er et statisk stabilitetsproblem og oppstår ved reduksjon av torsjonsstivheten til tverrsnittet. Vinden får bedre tak ved økende rotasjon, slik at vridningsmomentet tilslutt overskrider kapasiteten.
- Galloping er et dynamisk stabilitetsproblem for vertikale svingninger. Det oppstår ved at systemets dempning i vertikal retning reduseres på grunn av bevegelsesinduserte krefter. Ved kritisk vindhastighet vil dempningen være lik null og responsen vil øke dramatisk. Galloping er et problem ved ikke-strømlinjeformede konstruksjoner, for eksempel betongbruer etter fritt-frambygg prinsippet.
- Torsjonsflutter er et tilsvarende stabilitetsproblem som galloping, men det innebærer rotasjonsbevegelse i stedet for vertikal bevegelse.
- Flutter er et dynamisk stabilitetsproblem hvor bevegelsen i vertikal retning og rotasjon kobles sammen til en felles bevegelse. Dette skjer fordi de bevegelsesinduserte kreftene har en tendens til å redusere stivheten til torsjonsmodene og øke stivheten til de vertikale modene. Dette fører til at egenfrekvensen til torsjonsmodene reduseres og egenfrekvensen til de vertikale modene øker, slik at de nærmer seg hverandre. Torsjonsmoden med lavest egenfrekvens og vertikalmoden med tilnærmet lik egensvingeform er ofte mest utsatt for å falle sammen til en felles egenfrekvens. Hvis vindenergien som overføres til systemet i de to modene er større enn energien som går ut av systemet på grunn av dempning, vil responsen tilslutt øke ubegrenset. Her vil både aerodynamisk stivhet og dempning påvirke hvor mye energi som tilføres og tas ut av systemet. For hengebroer vil ofte flutter være det kritiske stabilitetsfenomenet.

Etter kollapsen av Tacoma Narrow Bridge på vestkysten i USA i 1940 ble aeroelastiske fenomener viktige forskningsområder og beregningsmetoder som brukes i dag ble utviklet i tiårene som fulgte (Scanlan 1990). Aeroelastisitet er beskrivelsen av hvordan de elastiske egenskapene (styrke og stivhet) til en konstruksjon endres når konstruksjonen beveger seg i et vindfelt. Tacoma Narrow Bridge var en veldig slank (smal og tynn) hengebro i forhold til de hengebroene som til da var konstruert (Åkesson 2008). Brobanen hadde en tverrsnittsform som var ugunstig for de aerodynamiske kreftene. Dette førte tilslutt til at broen brøt sammen på grunn av torsjonsflutter i første



Figur 1-1: Torsjonsflutter som førte til kollaps av Tacoma Narrows Bridge i USA i 1940. (Åkesson 2008)



Figur 1-2: Tverrsnitt av brobanen til Hardangerbroa. Et eksempel på et strømlinjeformet kassetverrsnitt med gode aerodynamiske egenskaper. (Statens vegvesen 2013a)

antisymmetriske egensvingeform, ved en vindhastighet på 20 m/s (Billah & Scanlan 1991). Svingningene (rotasjonen til tverrsnittet) var da så store at den ene kanten av brubanen var 8.5m høyere enn den andre kanten (Åkesson 2008).

Stabilitetsfenomenene beskrevet over kan unngås ved at stabilitetsgrensen (den kritiske vindhastigheten) er høyere enn den maksimale vindhastigheten som kan forventes på stedet. Ved å endre på forskjellige egenskaper til brokonstruksjonen kan stabilitetsgrensen økes. For det første kan de aerodynamiske egenskapene til tverrsnittet endres slik at de bevegelsesinduserte kreftene blir mindre eller til og med motvirker bevegelsen og dermed blir stabiliserende. Det er denne tankegangen som har ført til utvikling av de strømlinjeformede kassetverrsnittene som er vanlig for dagens hengebroer som vist i Figur 1-2. Kassetverrsnittene kan også påmonteres ledesskovler for å endre luftstrømmen rundt tverrsnittet og dermed forbedre de aerodynamiske egenskapene ytterligere. Et lukket tverrsnitt, som kassetverrsnittet, er også fordelaktig med tanke på økt torsjonsstivhet. Ved å øke stivheten til brobanen kan

stabilitetsgrensen økes. Utover å øke stivheten til selve brobanen kan også stivheten til en hengebro økes ved å forandre kabelkonfigurasjonen. Flere bærekabler og hengestenger i skrå plan kan øke stabilitetsgrensen betraktelig (Astiz 1998). Den tredje egenskapen som kan påvirke stabilitetsgrensen er dempningsegenskapene. Dempningen til systemet kan økes ved å installere aktive eller passive dempningssystemer.

En massedemper er et eksempel på en passiv innretning som øker den effektive dempningen i systemet. Den er passiv fordi det ikke er nødvendig med en ekstern energiforsyning eller styremekanisme. Dette gjør at massedemperen krever lite vedlikehold og er meget pålitelig. Massedempere er mye brukt i skyskrapere og høyhus og har vist seg meget effektive for å dempe svingninger forårsaket av vind og jordskjelv (Connor 2003). For brokonstruksjoner har massedempere vært mye brukt som sikkerhet mot store svingninger under konstruksjonsfasen hvor stivheten til konstruksjonen er lavere (Miyata 2003). Massedempere er også brukt som varige installasjoner på broer. Et kjent eksempel er gangbrua Millenium Bridge i London som måtte stenges rett etter åpning i år 2000 på grunn av store sideveis svingninger forårsaket av fotgjengere. Dempningen til brokonstruksjonen ble økt ved å blant annet installere massedempere (Dallard et al. 2001). Det er ikke funnet eksempler på bruk av massedempere for å unngå stabilitetsproblemer for hengebroer, men noen teoretiske studier har tidligere vært utført på området.

Denne oppgaven omhandler stabilitetsproblemet flutter for hengebroer, og hvordan den kritiske vindhastigheten kan økes ved bruk av passive massedempere. Flutter oppstår ved at de bevegelsesinduserte kreftene reduserer stivheten og dempningen til systemet. Ved økende vindhastighet vil de endrede stivhetsegenskapene føre til at den vertikale svingningen og rotasjonssvingningen tilslutt faller sammen til en felles bevegelse. Svingningene vil øke ubegrenset når de bevegelsesinduserte kreftene blir så store at den effektive stivheten eller dempningen til systemet blir null. Forsøk har vist (Strømmen 2010) at det ofte er de aerodynamiske kreftene assosiert med rotasjonsbevegelsen som er de drivende kreftene i flutterfenomenet. Det er derfor gode grunner til å tro at en massedemper som demper rotasjonssvingningene vil ha størst effekt på å øke stabilitetsgrensen. Massedemperen kan bygges inn i kassetverrsnittet til brobanen og dermed være beskyttet mot regn og fukt. På denne måten blir massedemperen også lett tilgjengelig, noe som forenkler kontroll og vedlikehold.



I denne oppgaven er den kritiske vindhastigheten for flutter funnet ved se på utviklingen av responsen ved økende vindhastighet. Responsen er beregnet ved en modal analyse som inkluderer de to modene som er antatt å bidra til ustabiliteten: Torsjonsmoden med lavest egenfrekvens og den vertikale moden som har mest formlik egensvingeform. Bevegelsesinduserte laster med kobling mellom modene og laster fra turbulens og massedemper er inkludert i beregningen.

Oppgaven presenterer beregningsmetoden for å bestemme kritisk vindhastighet og viser hvordan en massedemper kan øke stabilitetsgrensen ved å vise resultater fra beregninger på to forskjellige hengebroer. Presentasjonen av teori er delt i to. Først beskrives og forklares de ulike teoriene for likevekt, modal analyse, massedemper og vindlast i en generell formulering. Deretter utledes beregningsmetoden og antagelser og forenklinger presenteres der hvor det er naturlig.

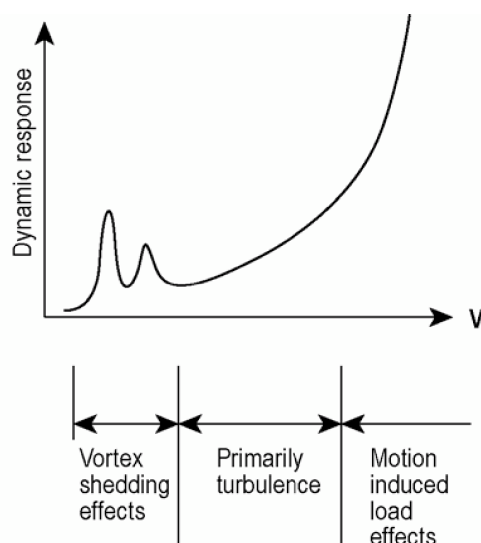


## 2 Grunnleggende teori

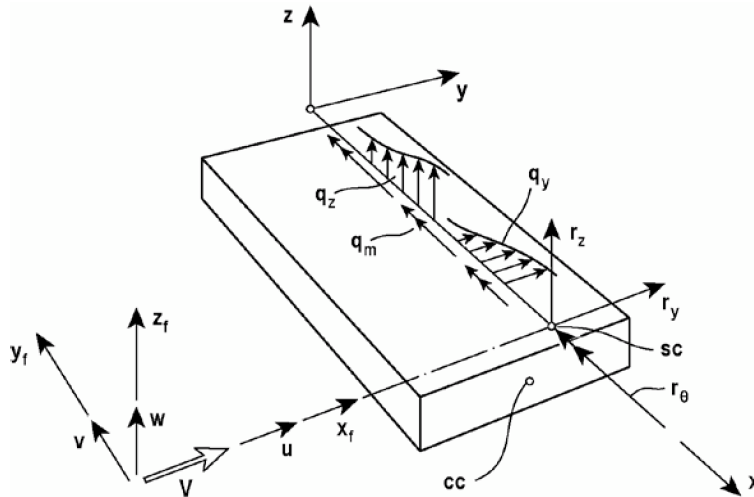
### 2.1 Generelle antagelser og definisjon av aksestystemer

I denne avhandlingen presenteres en metode for å beregne responsen til lange slanke hengebroer med en massedemper montert for å dempe responsen for rotasjon. Utviklingen av responsen når middelvindhastigheten øker er avhengig av turbulens og bevegelsesinduserte krefter, som kan føre til at responsen øker ytterligere. Ved fortsatt økning av middelvindhastigheten vil responsen til slutt øke uhemmet, konstruksjonen har nådd sin stabilitetsgrense og den tilhørende middelvindhastigheten er den kritiske vindhastigheten også kalt flutterhastigheten. Utviklingen er vist i Figur 2-1. Hvirvelavløsningsfenomenet (vortex shedding) oppstår ved lave vindhastigheter og omtales ikke i denne oppgaven.

Definisjonen av aksestystemet er vist i Figur 2-2. Vindvektoren er beskrevet i det kartesiske koordinatsystemet  $(x_f, y_f, z_f)$ , hvor  $x_f$  er retningen til



Figur 2-1: Fenomener som er opphav til dynamisk respons for en slank konstruksjon. (Strømmen 2010)



Figur 2-2: Definisjon av akser for vindstrømmen og konstruksjon. Vindvektor, forskyvninger og laster er vist. (Strømmen 2010)

middelvindhastigheten. Vindvektoren med middelvindhastighet og turbulens er gjort rede for i kapittel 3.1. Brokonstruksjonen er beskrevet i det kartesiske koordinatsystemet  $(x, y, z)$ , hvor  $x$  er koordinaten parallelt med brobanen,  $y$  er horisontalt normalt på brobanen og  $z$  er vertikalt. Origo er plassert i skjærsenteret, som vil sammenfalle med massesenteret når tverrsnittet er symmetrisk om både  $y$ -aksen og  $z$ -aksen. De fleste stålkassetverrsnitt som benyttes for hengebroer vil være tilnærmet symmetrisk. Forskyvninger og laster refererer til konstruksjonens koordinatsystem, mens vindparameterne referer til vindens koordinatsystem. Det er antatt at middelvinden alltid står normalt på konstruksjonens lengdeakse slik at koordinatsystemene ikke endrer seg i forhold til hverandre.

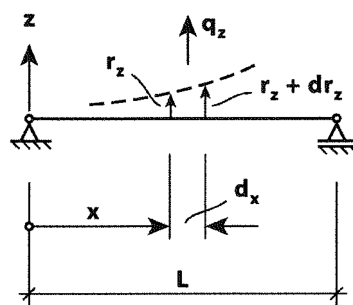
Vind er en stokastisk prosess som ikke kan forutsies eksakt for et gitt tidspunkt og et gitt sted. Vind må derfor beskrives med statistiske størrelser basert på målinger over lang tid. Vind og turbulens gir stokastiske laster på konstruksjoner som videre gir en stokastisk respons. Det er vanlig å anta at vindvektoren kan deles opp i en middelerdi og en varierende turbulens. Lastene og responsen på grunn av vind, kan på samme måte splittes i en konstant middelerdi med en varierende del. Det vil i denne oppgaven kun bli fokusert på den varierende responsen. Den konstante middelerdien kan beregnes etter statiske metoder og beskrives ikke nærmere her.

I den videre presentasjonen av teorien antas det at alle materialer og laster er lineære. Dermed vil ikke-lineariteter neglisjeres eller lineariseres hvor det er nødvendig. Videre vil elementær-bjelke-teori ligge til grunn. Dette innebærer at et hvert bjelketverrsnitt forblir en plan flate og står normalt på bjelkeaksen under deformasjon. Spenningene må kunne beskrives av Hooks lov for lineært elastiske materialer og deformasjonene må antas å være små. Fra elementær-bjelke-teori kan det utledes bjelkeformler for sammenhengen mellom spenningsresultanter og deformasjoner. Disse antas kjent for leseren.

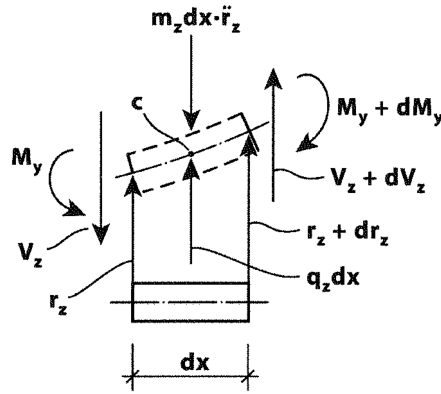
## 2.2 Dynamisk likevekt og modal analyse

I et statisk system, det vil si en konstruksjon som er i ro eller beveger seg med en konstant hastighet, kan likevektslikningen bestemmes ut fra et fritt legeme diagram og Newtons tredje lov:  $\sum F = 0$ . D' Alembert's prinsipp er en tilsvarende måte for å bestemme likevektslikningen for et dynamisk system (Chopra 2007). Prinsippet fastslår at man kan fryse bevegelsen til systemet for et vilkårlig tidspunkt og forskyvning, og beskrive treghetskreftene (inertia force) etter Newtons andre lov,  $F = m \cdot a$ , hvor kraften virker i motsatt retning av akselerasjonen. Disse kreftene vil representere motstanden en masse har til å akselereres. Den dynamiske likevektslikningen kan dermed, i henhold til d' Alembert's prinsipp, bestemmes ut fra et fritt legeme diagram inkludert treghetskreftene. (Strømmen 2013)

En bro kan sees på som et enkelt bjelkelignende system med en fordelt dynamisk last, som vist i Figur 2-3.



Figur 2-3: Kontinuerlig bjelkelignende system. (Strømmen 2013)



Figur 2-4: Frilagt legeme i likevekt etter d'Alembert's prinsipp for et bjelkeelement. (Strømmen 2013)

Likevektslikningen for systemet settes opp etter d'Alembert's prinsipp for et infinitesimalt bjelkeelement med lengde  $dx$ , ved å kreve vertikal likevekt og momentlikevekt om punkt C i Figur 2-4. Her er  $q_z(x)$  den fordelte lasten,  $m_z(x)$  den fordelte massen som gir treghetskrefter i z-retning,  $M_y$  er tverrsnittsmomentet om y-aksen og  $V_z$  er skjærkraften i vertikal retning. Dette gir ligningene:

$$\begin{aligned} dM_y - V_z \cdot dx &= 0 \\ q_z \cdot dx - m_z \cdot dx \cdot \ddot{r}_z + dV_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ved å kombinere disse ligningene til en ligning får man:

$$\frac{d^2}{dx^2} M_y = -q_z + m_z \cdot \ddot{r}_z \quad (2.2)$$

Fra elementærbjelketeori er bøyemomentet om y-aksen i et tverrsnitt gitt ved  $M_y = -r_z'' EI_y$ . Dette settes inn i ligning (2.2) slik at

$$\frac{d^2}{dx^2} (-r_z'' EI_y) = -q_z + m_z \cdot \ddot{r}_z \quad (2.3)$$

Hvis stivheten og tverrsnittet er konstant langs broas lengde kan ligningen forenkles til:

$$m_z \cdot \ddot{r}_z + EI_y \cdot r_z^{(4)} = q_z \quad (2.4)$$

Dette er likevektsligningen til systemet og er en partiell differensialligning av andre orden i tid og fjerde orden i rom, ofte kalt bjelkens differensialligning. Ligning (2.4) gjelder for et udempet system. I en virkelig konstruksjon vil det alltid være en dempingseffekt. Den kan være avhengig av materialene, friksjon og annet, og fører til at frie svingninger (ubelastet system) vil dø ut over tid. Det er vanlig å bruke en viskøs dempningsmodell for å beskrive dempingseffektene for broer (Strømmen 2013). Det vil si at dempningskreftene er proporsjonale med hastigheten til deformasjonene til konstruksjonen. Ligning (2.4) kan derfor utvides ved å innføre et dempningsledd som følger.

$$m_z \cdot \ddot{r}_z + c_z \cdot \dot{r}_z + EI_y \cdot r_z^{(4)} = q_z \quad (2.5)$$

hvor  $c_z$  er dempningsparameteren.

Ligning (2.5) kalles også bjelkeproblemets sterke form. Bell (2011) viser hvordan problemets sterke form kan endres ved matematisk manipulasjon til problemets svake form. Ved å tolke vektingsfunksjonen som en virtuell forskyvning uttrykker problemets svake form virtuelle forskyvningers prinsipp. Ved å ta utgangspunkt i likevektsligningen (2.5) hvor tverrsnittsmomentet er uttrykt ved  $M_y = -r_z''EI_y$ , kan bjelkeproblemets sterke form skrives:

$$M_y'' + q_z = m_z \cdot \ddot{r}_z + c_z \cdot \dot{r}_z \quad (2.6)$$

Ved å multiplisere ligningen med en vilkårlig vektingsfunksjon,  $\tilde{w}(x)$ , og integrere over hele konstruksjonens lengde får man:

$$\int_0^L M_y'' \cdot \tilde{w} dx + \int_0^L q_z \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \tilde{w} dx + \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \tilde{w} dx \quad (2.7)$$

Videre manipulasjon omfatter kun det første leddet. Delvis integrasjon, gitt ved  $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ , gir:

$$\left[ M_y' \cdot \tilde{w} \right]_0^L - \int_0^L M_y' \cdot \tilde{w}' dx + \int_0^L q_z \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \tilde{w} dx + \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \tilde{w} dx \quad (2.8)$$

Ytterligere delvis integrasjon av første integral gir:

$$\left[ M_y' \cdot \tilde{w} \right]_0^L - \left[ M_y \cdot \tilde{w}' \right]_0^L + \int_0^L M_y \cdot \tilde{w}'' dx + \int_0^L q_z \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \tilde{w} dx + \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \tilde{w} dx \quad (2.9)$$

Ved å sette inn  $M_y = -r_z'' EI_y$  og flytte om på leddene blir ligningen:

$$\left[ M_y' \cdot \tilde{w} \right]_0^L - \left[ M_y \cdot \tilde{w}' \right]_0^L + \int_0^L q_z \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L EI_y r_z'' \cdot \tilde{w}'' dx \quad (2.10)$$

Dette er problemets svake form. Den er matematisk like korrekt (ekvivalent) som problemets sterke form og det er ikke stilt noen krav til vektingsfunksjonen bortsett fra at den må være to ganger deriverbar. Ved å betrakte vektingsfunksjonen som en virtuell forskyvning, kan de ulike leddene betraktes som arbeid utført av kreftene gjennom den virtuelle forskyvningen, summert over konstruksjonens lengde. Randleddene, leddene i hakeparenteser representerer arbeid som gjøres av opplagskreftene, hvor  $x=0$  og  $x=L$ . Ved å velge virtuelle forskyvninger som tilfredsstiller de kinematiske og mekaniske randbetingelsene, blir randleddene null og kan strykes. I dette tilfellet, for en fritt opplagt bjelke, vil de kinematiske randbetingelsene,  $\tilde{w}(0)=0$  og  $\tilde{w}(L)=0$ , føre til at første randledd kan strykes, mens de mekaniske randbetingelsene,  $M_y(0)=0$  og  $M_y(L)=0$ , vil føre til at andre randledd kan strykes.

Det første integralet representerer arbeidet som utføres av ytre fordelte laster langs hele konstruksjonen. Den virtuelle forskyvningen er tidsuavhengig og ved å betrakte et tidspunkt hvor den virtuelle forskyvningen er i samme retning som lasten og den reelle forskyvningen, blir dette arbeidet utført på systemet (positivt) og bidrar til å øke systemets potensielle energi. De to neste leddene er arbeidet som gjøres av treghets- og dempningskreftene. Disse kreftene motvirker bevegelsen til systemet og virker således i motsatt retning av den virtuelle forskyvningen. Arbeidet som gjøres blir utført av systemet og reduserer systemets potensielle energi tilsvarende (negativt). Det siste leddet, på høyre side av likhetstegnet, representerer arbeidet som gjøres av de indre kreftene til systemet. Dette arbeidet gjøres også av systemet og reduserer systemets potensielle energi. I dette tilfellet er det kun tøyning på grunn av bøyemoment som er tatt med, skjærtøyningene og geometrisk stivhet er neglisjert.



Ettersom energi verken kan skapes eller brukes, men kun omformes fra en energiform til en annen, må arbeidet som gjøres *på* systemet tilsvare arbeidet som gjøres *av* systemet. Ved å la vektingsfunksjonen representere en virtuell forskyvning er det denne fysiske loven som ligning (2.10) beskriver. Arbeidsbetraktingen ovenfor kalles derfor også prinsippet om virtuelt arbeid. Fordelene med den svake formen i forhold til den sterke formen får vi først nytte av når man innfører antatte forskyvningsfunksjoner. Dette gjøres når et begrenset antall moder/egensvingeformer benyttes i en modal analyse. Arbeidslikevekten mellom ytre og indre arbeid blir dermed:

$$\int_0^L q_z \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L EI_y r_z'' \cdot \tilde{w}'' dx \quad (2.11)$$

Arbeidslikevekten for forskyvning i horisontal retning, y-akse, blir tilsvarende utledningen ovenfor. For rotasjon om x-aksen kan likevekten utledes på samme måte, etter d'Alemberts prinsipp og virtuelle forskyvningers prinsipp. Den partielle differensialligningen som beskriver likevekten ved rotasjon, tilsvarende ligning (2.6), kan utledes (Strømmen 2013) til:

$$M'_x + q_\theta = m_\theta \cdot \ddot{r}_\theta + c_\theta \cdot \dot{r}_\theta \quad (2.12)$$

Videre ganges leddene med vektingsfunksjonen, som kan betraktes som en virtuell rotasjon, og integreres over lengden. Torsjonsmomentet,  $M_x$ , er derivert en gang i ligning (2.12), slik at delvis integrasjon gjøres en gang. For at randleddet skal kunne strykes må vektingsfunksjonen oppfylle de kinematiske randbetingelsene til konstruksjonen. For en fritt opplagt bjelke som er gaffellagret, vil dette medføre at vektingsfunksjonen må være null ved opplagene. Uttrykket for arbeid gjort av indre krefter, torsjonsmomentet, blir, ved å anta lineært elastisk materiale og St. Venant torsjon, proporsjonalt med i den deriverte av tverrsnittsrotasjonen,  $r'_\theta$ .

$$M_x = -r'_\theta \cdot GI_T \quad (2.13)$$

hvor  $G$  er skjærmodulen og  $I_T$  er tverrsnittsparmeteren for torsjonsstivhet. Torsjonsmomenter fra velvning (warping) er ikke tatt med.

Utleddning av uttrykkene for bøyningsmoment og torsjonsmoment er ikke vist i detalj her, men kan leses i bøker om grunnleggende konstruksjonsstatikk, for eksempel (Irgens 2006) og (Strømmen 2013)

Den tilsvarende arbeidslikevekten for rotasjonsfrihetsgraden blir dermed:

$$\int_0^L q_\theta \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L m_\theta \ddot{\theta} \cdot \tilde{w} dx - \int_0^L c_\theta \dot{\theta} \cdot \tilde{w} dx = \int_0^L G I_T r'_\theta \cdot \tilde{w}' dx \quad (2.14)$$

Det må presiseres at  $m_\theta$  i dette tilfelle er den fordelte roterende massen, som kan tilnærmes etter formelen  $m_\theta \approx \sum m_i \cdot r_i$ . Hvor  $m_i$  er en fordelt delmasse med tilhørende radius til rotasjonssentrum,  $r_i$ . For generelle tverrsnitt må man ta hensyn til at horisontal og vertikal akselerasjon av systemet gir momentkrefter hvis massesenteret og skjærsenteret ikke sammenfaller. For de fleste brotverrsnitt vil derimot disse i stor grad sammenfalle slik at momentene på grunn av horisontale og vertikale treghetskrefter kan neglisjeres.

Eventuelle konstante strekk- og trykkrefter i tverrsnittet vil påvirke stivheten til systemet. For hengebroer vil forspenning av kablene utgjøre en stor del av stivheten til broa. For å introdusere dette i arbeidslikevektligningene (2.11) og (2.14) må arbeidet strekkraftene gjør gjennom den virtuelle forskyvningen adderes til. Utleddningen fra Strømmen (2013) gir følgende bidrag:

$$\int_L \bar{N} r'_z \cdot \tilde{w}' dx \quad (2.15)$$

og tilsvarende for horisontal forskyvning. For rotasjon om x-aksen er uttrykket for det virtuelle arbeidet gitt som:

$$\int_L \bar{N} e_0^2 r'_\theta \cdot \tilde{w}' dx \quad (2.16)$$

hvor  $e_0^2 = e_y^2 + e_z^2 + e_p^2$ , og  $e_p^2 = \frac{1}{A} (I_y + I_z)$ .  $e_y$  og  $e_z$  er avstand mellom massesenter og skjærsenter langs respektive akse og er tidligere antatt å være neglisjerbar.  $e_p$  er gitt av bøyemotstandene om y- og z-aksen.

Hvis systemet inneholder punktlaster, vil disse også gjøre et arbeid gjennom den virtuelle forskyvningen. Dette arbeidet er gitt som kraft multiplisert med virtuell forskyvning og må adderes til lastdelen i arbeidslikevekten. Uttrykket kan skrives:

$$\sum_k F_k \cdot \delta r_i(x_k) \quad \text{hvor} \quad i = y, z, \theta \quad (2.17)$$

For at randleddene skal bli null må de virtuelle forskyvningene oppfylle de kinetiske og mekaniske randvilkårene. Det er derfor vanlig å velge samme forskyvningsfunksjon for de virtuelle forskyvningene som for de reelle forskyvningene (Strømmen 2013). Ved å innføre notasjonen  $\delta r_i(x)$  for vektingsfunksjonen (hvor  $i$  angir retningen  $y$ ,  $z$  eller  $\theta$ ), og videre inkludere strekkrefter og punktlaster som gitt i ligning (2.15) til (2.17), kan ligningene for arbeidslikevekt skrives:

$$\int_0^L q_y \cdot \delta r_y dx + \sum F_{y,k} \cdot \delta r_y(x_k) - \int_0^L m_y \ddot{r}_y \cdot \delta r_y dx - \int_0^L c_y \dot{r}_y \cdot \delta r_y dx = \int_0^L EI_z r_y'' \cdot \delta r_y'' + \bar{N} r_y' \cdot \delta r_y' dx \quad (2.18)$$

$$\int_0^L q_z \cdot \delta r_z dx + \sum F_{z,k} \cdot \delta r_z(x_k) - \int_0^L m_z \ddot{r}_z \cdot \delta r_z dx - \int_0^L c_z \dot{r}_z \cdot \delta r_z dx = \int_0^L EI_y r_z'' \cdot \delta r_z'' + \bar{N} r_z' \cdot \delta r_z' dx \quad (2.19)$$

$$\int_0^L q_\theta \cdot \delta r_\theta dx + \sum F_{\theta,k} \cdot \delta r_\theta(x_k) - \int_0^L m_\theta \ddot{r}_\theta \cdot \delta r_\theta dx - \int_0^L c_\theta \dot{r}_\theta \cdot \delta r_\theta dx = \int_0^L (GI_T r_\theta' + \bar{N} e_p^2 r_\theta') \delta r_\theta' dx \quad (2.20)$$

Videre beregninger gjøres på modal form. En modal analyse tar utgangspunkt i systemets egenfrekvenser med tilhørende ortogonale egensvingeformer. Disse kan beregnes ved å løse konstruksjonens egenverdiproblem gitt ved:

$$(\mathbf{K}_{tot} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

hvor stivhetsmatrisen,  $\mathbf{K}_{tot} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g$ , og massematrisen,  $\mathbf{M}$ , er kjent fra en elementmetode betraktning eller andre metoder.  $\mathbf{K}_{tot}$  inneholder både den strukturelle stivheten og den geometriske stivheten.

Løsningen av egenverdiproblemet beskrives ikke nærmere her og i den videre utledningen antas det at et tilstrekkelig antall nøyaktige egenfrekvenser med tilhørende egensvingeformer er kjent. Utledningen er i en kontinuerlig betraktning slik at egensvingformene antas å kunne skrives som funksjon av lengdekoordinaten,  $x$ .

I en modal analyse antas det at responsen, forskyvningene til konstruksjonen, kan skrives som en sum av egensvingformene,  $\varphi_i$ , multiplisert med en tidsvarierende amplitdefunksjon,  $\eta_i$ .

$$\mathbf{r}(x,t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \begin{bmatrix} \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \varphi_\theta(x) \end{bmatrix}_i \cdot \eta_i(t) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) \quad (2.22)$$

der

$$\mathbf{\Phi}(x) = [\boldsymbol{\varphi}_1(x) \cdots \boldsymbol{\varphi}_i(x) \cdots \boldsymbol{\varphi}_{N_{\text{mod}}}(x)] \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_y \quad \varphi_z \quad \varphi_\theta]_i^T \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1(t) \cdots \eta_i(t) \cdots \eta_{N_{\text{mod}}}(t)]^T$$

Den totale responsen sees dermed på som en superposisjon av de forskjellige delresponsene tilhørende hver egensvingeform. En forutsetning for å kunne gjøre dette er at alle kreftene og lastene (leddene i likevektslikningen) er lineære. Dette er ivarettatt ved å anta at responsen holder seg innenfor materialenes elastiske område og ved lineariseringer av strekkrefter og vindlaster.

De virtuelle forskyvningene gis tilsvarende form som de reelle forskyvningene ved å introdusere de samme egensvingformene:

$$\delta \mathbf{r}(x) = \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \begin{bmatrix} \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \varphi_\theta(x) \end{bmatrix}_i \cdot \delta \eta_i = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \delta \boldsymbol{\eta} \quad (2.24)$$

Ved å sette ligning (2.22) og (2.24) inn i arbeidslikevektslikningene (2.18) til (2.20) kan disse skrives på matriseform som følger:

$$\delta \boldsymbol{\eta}^T [\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\eta}(t)] = \delta \boldsymbol{\eta}^T \tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (2.25)$$

hvor  $\delta \boldsymbol{\eta}^T$  er vilkårlig og kan strykes ved å pre-multiplisere med  $[\delta \boldsymbol{\eta}^T]^{-1}$ .

Dermed blir likevektsligningen som følger:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\eta}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (2.26)$$

Dette er den dynamiske likevektsligningen som er utgangspunktet for alle dynamiske analyser. Innholdet i matrisene er gitt ved:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \text{diag}[\tilde{M}_i] & \text{hvor} & \quad \tilde{M}_i = \int_L \boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i dx \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \text{diag}[\tilde{C}_i] & \text{hvor} & \quad \tilde{C}_i = 2\tilde{M}_i \omega_i \zeta_i \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \text{diag}[\tilde{K}_i] & \text{hvor} & \quad \tilde{K}_i = \omega_i^2 \tilde{M}_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

Her er massematrisen,  $\mathbf{M}$ , en diagonal matrise med elementene  $m_y$ ,  $m_z$  og  $m_\theta$ . Den modale massematrisen,  $\tilde{\mathbf{M}}$ , kan alternativt hentes direkte fra løsningen av egenverdiproblemet i elementmetodeberegningen.  $\omega_i$  er egenfrekvensene og  $\zeta_i$  er dempningsforholdet for tilhørende egensvingeform. Den modale stivhetsmatrisen,  $\tilde{\mathbf{K}}$ , beregnes fra egenfrekvensene og tilhørende modal masse. Stivhetsleddene i ligningene (2.18) til (2.20) benyttes derfor ikke direkte i den videre analysen. De ulike stivhetsbidragene behandles i stedet i egenverdiberegningen. Ulike brokonstruksjoner og brotyper har ulik virkemåte og det er viktig at nødvendige geometriske stivheter inkluderes. For hengebruer og andre kabelbruer utgjør den geometriske stivheten til kablene en betydelig del av den totale stivheten. Det modale lastleddet er gitt som:

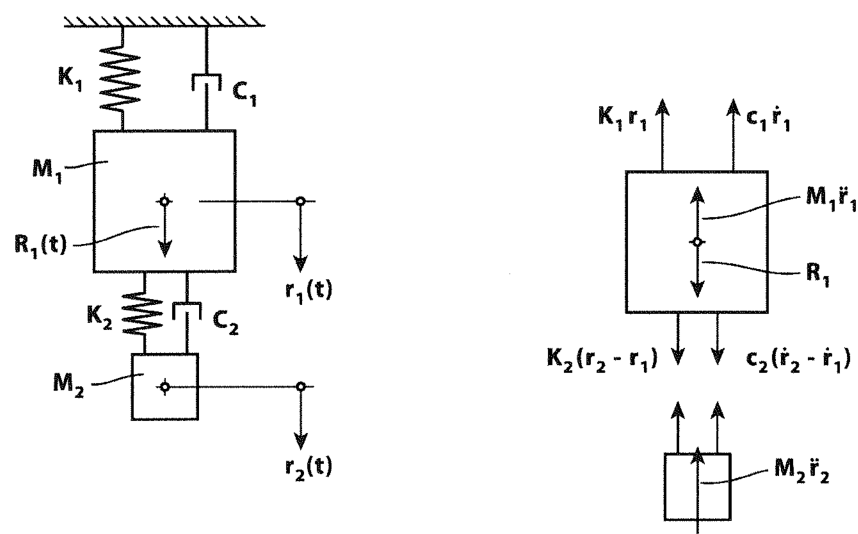
$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = [\tilde{R}_1 \cdots \tilde{R}_i \cdots \tilde{R}_{N_{\text{mod}}}]^T \quad (2.28)$$

hvor  $\tilde{R}_i(t) = \int_L \boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \mathbf{q}(x,t) dx$ . Hvor  $\mathbf{q}(x,t)$  inneholder alle fordelte laster som virker på konstruksjonen. For en bro vil dette være både laster fra turbulens og bevegelserinduserte laster. Vindlastene beskrives og utledes i kapittel 3.

## 2.3 Massedemperens virkemåte

Installering av passive massedempere, i litteraturen ofte kalt "tuned mass damper" (TMD), er en effektiv måte for å øke dempingseffekten til konstruksjonen. En massedemper demper responsen til en konstruksjon ved at en mindre masse svinger i mot-takt (mot-fase) av konstruksjonen og dermed skyver eller drar konstruksjonen i motsatt retning av responsen.

For å vise prinsippet presenteres et enkelt system med en massedemper, til sammen to frihetsgrader, som vist i Figur 2-5.



Figur 2-5: Enkel konstruksjon ( $M_1$ ) med massedemper ( $M_2$ ). Til høyre frilagt legeme etter d'Alembert's prinsipp. (Strømmen 2013)

Ved å benytte d'Alembert's prinsipp, som vist i Figur 2-5, kan likevektsligningen for systemet enkelt settes opp på matriseform som følger:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_1 \\ -C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_1 \\ -K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Det viser seg i den videre utledningen at matrisene blir mindre komplisert ved å definere en relativ frihetsgrad for massedemperen,  $\Delta r = r_2 - r_1$  og la forskyvningen av hovedkonstruksjonen være  $r=r_1$ . Deretter transformeres systemet til de nye frihetsgradene.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r + \Delta r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Skrevet på matriseform:

$$\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{r} \quad \text{hvor} \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Ved å introdusere de relative frihetsgradene, ligning (2.31), i likevektsligningen (2.29) og pre-multiplisere med  $\boldsymbol{\Psi}^T$  får vi følgende:

$$\begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\Delta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\Delta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \Delta r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Skrevet på matriseform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (2.33)$$

med matriser definert som følger

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ved å anta at massedempningen er liten i forhold til konstruksjonen,  $M_2 \ll M_1$ , kan det vises at (Strømmen 2013)

$$\omega_1 \approx \sqrt{K_1/M_1} \quad \text{og} \quad \omega_2 \approx \sqrt{K_2/M_2} \quad (2.35)$$

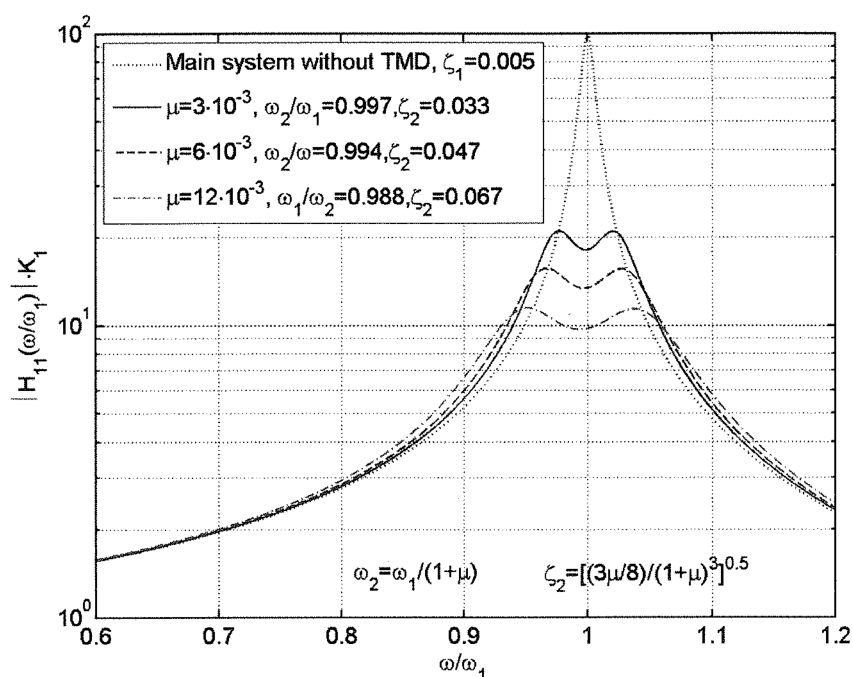
Ved å pre-multiplisere med  $\mathbf{K}^{-1}$  og ta fouriertransformasjon av ligning (2.33) finnes frekvens-respons-funksjonen,  $\hat{\mathbf{H}}(\omega)$ :

$$\mathbf{a}_r(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega) \cdot \mathbf{a}_R(\omega) \quad (2.36)$$

Hvor frekvens-respons-funksjonen blir

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = [\mathbf{I} - \omega^2 (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) + i\omega (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})]^{-1} \quad (2.37)$$

Alle matriser i ligning (2.37) er definert ovenfor. Det er vanlig å definere forholdet mellom massene som  $\mu = M_2/M_1$ . Figur 2-6 viser frekvens-respons-funksjonen for tre forskjellige demperstørrelser: 0.3%, 0.6% og 1.2% av massen til hovedkonstruksjonen. Egenfrekvensen til massedemperen er valgt litt lavere enn resonansfrekvensen. Dette er, i følge Den Hartog (1956), den optimale egenfrekvensen og virkningen er tydelig for frekvensene rundt resonansfrekvensen. Den tilsvarende optimale dempningen,  $\zeta_2$  er også gitt fra Den Hartog (1956). Det er viktig å bemerke at dempingen er begrenset til et forholdsvis smalt frekvensbånd og responstoppen blir litt bredere i forhold til systemet uten massedemper. Responsen kan derfor øke ved frekvenser i nærheten av resonansfrekvensen. Det er derfor viktig å justere egenfrekvensen til massedemperen slik at virkningen blir effektiv. En massedemper påvirker den effektive dempningen i hovedkonstruksjonen. Den påvirker ikke stivheten til konstruksjonen og vil derfor ikke endre den statiske, eller tilnærmet statiske responsen.



Figur 2-6: Frekvens-respons-funksjonen til en enkel konstruksjon med en massedemper. Uttrykkene for  $\omega_2$  og  $\zeta_2$  er gitt av Den Hartog (1956). (Strømmen 2013)

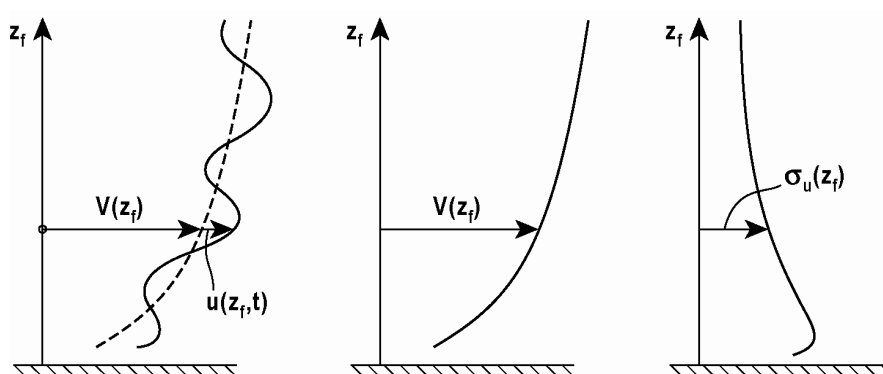


# 3 Vindlaster

## 3.1 Vindstatistikk

Vind er et komplekst fenomen som varierer i både tid og rom. Vinden kan oppfattes/beskrives på forskjellige måter avhengig av skalaen man ser på. De globale vindsystemene følger kjente fysiske lover og er mer eller mindre konstante. De regionale værsystemene kan forutsees med stor sannsynlighet, som vi kan lese i værmeldingen hver dag. Mens vinden vi opplever i øyeblikket, hvor vi befinner oss, virker å være tilfeldig med vindkast fra alle retninger.

Statistikk over vindmålinger (Dyrbye & Hansen 1997) viser at autospekteret, som viser variansfordelingen på ulike frekvenser, generelt har to toppler med et spektralgap mellom perioder på ca. 10 min og 5-10 timer. Dette betyr at vinden på macronivå (det overordnede vindsystemet) og på micronivå (turbulens) er statistisk uavhengig av hverandre. Det er derfor vanlig å beskrive den momentane vindhastigheten som en sum av middelvindhastighet (macronivå) og turbulens som vist i Figur 3-1. Middelvindhastigheten benevnes  $V(z_f)$  og turbulensen i tre komponenter,  $u(z_f, t)$ ,  $v(z_f, t)$  og  $w(z_f, t)$  for sine respektive vindakser,  $x_f$ ,  $y_f$  og  $z_f$ .



Figur 3-1: Momentan vindhastighet og vindprofil for middelvindhastighet og turbulens. (Strømmen 2010)

Middelvindhastigheten, bestemmes av kontinuerlige målinger ved en referansehøyde, vanligvis 10 m over bakkenivå, og er midlet over en periode på 10 min. Vindhastigheten øker oppover i høyden. Det er derfor nødvendig å etablere en vindhastighetsprofil. Ofte er profilen gitt som en logaritmisk funksjon av høyden over overflaten. En vanlig vindhastighetsprofil (Strømmen 2010) som også brukes i Eurokode 1.4 er:

$$\frac{V_{10}(z_f)}{V_{10}(z_{ref})} = \begin{cases} k_T \cdot \ln\left(\frac{z_f}{z_0}\right) & \text{når } z_f > z_{min} \\ k_T \cdot \ln\left(\frac{z_{min}}{z_0}\right) & \text{når } z_f \leq z_{min} \end{cases} \quad (3.1)$$

hvor  $k_T$ ,  $z_0$  og  $z_{min}$  er parametere som beskriver terrenget i området.

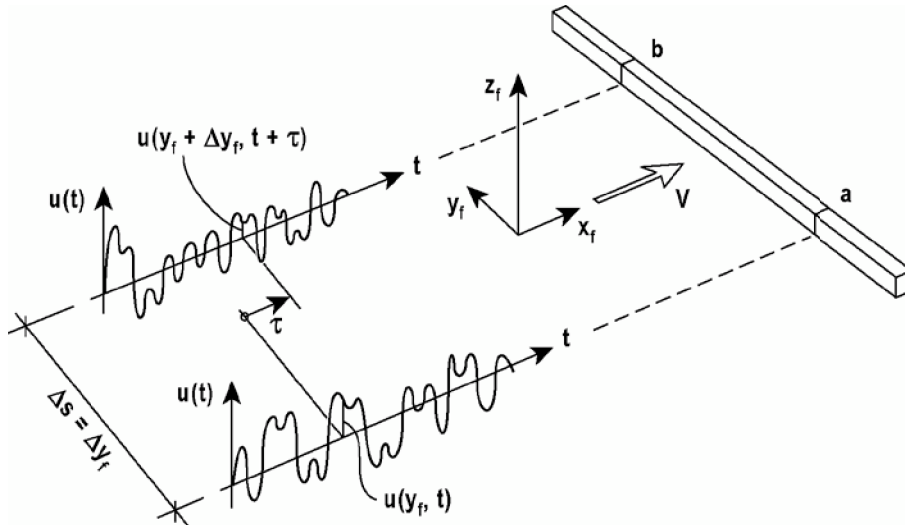
Turbulenskomponentene beskrives av variasjonen rundt middelvindhastigheten. Standardavviket til turbulenskomponentene beregnes fra 10 minutter lange vindserier hvor det antas at variasjonen er normalfordelt med middelfordi lik 0 m/s. Den tilhørende turbulensintensiteten er definert som:

$$I_n(z_f) = \frac{\sigma_n(z_f)}{V(z_f)} \quad \text{hvor } n = u, v, w \quad (3.2)$$

En turbulensprofil i vindretningen som vist i Figur 3-1 er gitt som (Strømmen 2010):

$$I_u(z_f) \approx \begin{cases} 1/\ln(z_f/z_0) & \text{når } z_f > z_{min} \\ 1/\ln(z_{min}/z_0) & \text{når } z_f \leq z_{min} \end{cases} \quad (3.3)$$

For broer og andre horisontale konstruksjoner etableres middelvindhastighet og turbulensintensiteter for den høyden som er representativ for konstruksjonen. Det antas at variasjonen i middelvindhastighet langs konstruksjonen er neglisjerbar. For broer som krysser brede fjorder vil dette være avhengig av topografien rundt fjorden og i slike tilfeller bør strømningsmønsteret rundt fjorden undersøkes med vindtunellforsøk.



Figur 3-2: To samtidige målinger av u-komponenten til turbulensen. (Strømmen 2010)

Som nevnt tidligere varierer vinden også i rom. Vindtrykket som treffer en konstruksjon med stor utstrekning vil ikke være konstant over hele konstruksjonen. Det må derfor utføres målinger på stedet for å avdekke den romlige variasjonen. Middelvindhastigheten er antatt konstant så det er turbulenskomponentene som analyseres videre. To samtidige målinger av turbulenskomponenten på to forskjellige punkter er vist i Figur 3-2.

Covariansen mellom de to turbulensmålingene med varierende separasjon,  $\Delta s$ , og tidsforskjell,  $\tau$ , er gitt ved:

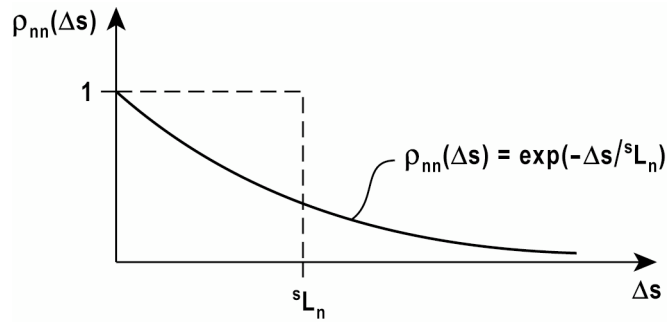
$$Cov_{uu}(\Delta s, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(s, t) \cdot u(s + \Delta s, t + \tau) dt \quad (3.4)$$

hvor  $\Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f$

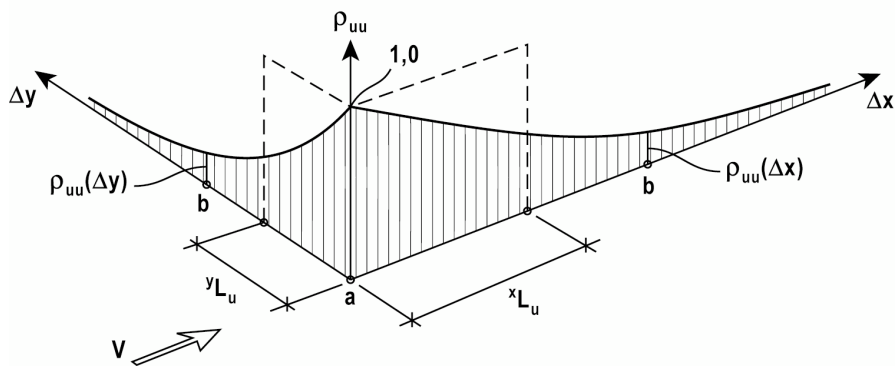
Tilsvarende for komponentene  $v$  og  $w$ .  $\Delta s$  kan ha alle verdier, mens  $\tau$  kan være verdier fra 0 til  $T$  (10 min). Det kan antas at turbulenskomponentene er uavhengig av hverandre når avstanden til bakken og andre forstyrende elementer er stor, slik at  $Cov_{uv}$  og  $Cov_{vw}$  er neglisjerbare.

De tilhørende covarians koeffisientene er definert som:

$$\rho_{nn}(\Delta s, \tau) = \frac{Cov_{nn}(\Delta s, \tau)}{\sigma_n^2} \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (3.5)$$



Figur 3-3: Covarians koeffisienten som funksjon av separasjon. (Strømmen 2010)



Figur 3-4: Illustrasjon av de karakteristiske lengdene for turbulenskomponent  $u$ .  $V$  angir middelvindretningen. (Strømmen 2010)

Covariansen er en størrelse som viser om turbulensen opptrer i takt ved forskjellige målepunkter. Generelt vil covariansen avta med økende separasjon,  $\Delta s$ , og tidsforskyving,  $\tau$ , som vist i Figur 3-3. For å beskrive denne effekten innføres størrelsen, karakteristiske lengder.

Den karakteristiske lengden,  $^sL_n$ , er vist i Figur 3-3 og definert som:

$$^sL_n = \int_0^{\infty} \rho_{nn}(\Delta s, \tau) d(\Delta s) \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (3.6)$$

Disse lengdene er den karakteristiske utbredelsen til turbulensen. I dagligtale kalles turbulensen for vindkuler eller vindkast og de karakteristiske lengdene blir et mål på størrelsen (høyde, bredde og lengde) til vindkulene. I Figur 3-4 er de karakteristiske lengdene for turbulenskomponent  $u(x, t)$  vist.  $^xL_u$  er langs vindretningen og  $^yL_u$  er horisontalt på tvers av vindretningen.  $^zL_u$  er ikke vist.

Tilsammen er det tre karakteristiske lengder som beskriver hver komponent, totalt ni for alle tre komponentene. Disse kan etableres ved flere vindmålinger i alle koordinatretningene,  $x_f$ ,  $y_f$  og  $z_f$ . Da er tidsforskyvningen,  $\tau$ , unødvendig og alle karakteristiske lengder kan etableres ved romlige covarianser, funksjoner av  $\Delta s$ .

I praksis er det hensiktsmessig å måle turbulensen langs en linje. F. eks. med flere vindmålere montert på en oppspent wire eller i forskjellige høyder på en mast. Ved å anta at turbulensen i middelvindretningen,  $x_f$ , forflytter seg med middelvindhastigheten,  $V$ , kan man beregne de karakteristiske lengdene for  $u$ -,  $v$ - og  $w$ -komponentene i  $x_f$ -retningen ved ettpunktsmålinger og tidsforskyvningen,  $\tau$ , som separasjon etter ligning (3.7).

$${}^{x_f}L_n = V \cdot T_n = V \cdot \int_0^\infty \rho_n(\Delta s = 0, \tau) d\tau \quad \text{hvor} \quad n = u, v, w \quad (3.7)$$

hvor  $T_n$  er gjennomsnittlig periode til frekvenskomponent,  $n$ .

Slik kan alle karakteristiske lengder bestemmes uten å kartlegge vindfeltet i samtlige romlige retninger. For en bro eller annen horisontal konstruksjon er ikke de karakteristiske lengdene i vertikal retning,  $z_f$ , nødvendige. Det er turbulensvariasjonen langs brobanen,  $y_f$ , i tillegg til variasjonen i middelvindretningen, som er interessant for responsberegningen. De nødvendige karakteristiske lengdene kan derfor bestemmes ved flere vindmålere langs en horisontal linje i en representativ høyde.

Covariansen beskriver turbulensen i tid og rom, mens auto- og cross-spektraltettheten beskriver turbulensen i frekvensdomenet. Spektraltetthetene er nødvendige for å gjøre en modal analyse og beregnes ved å ta fouriertransformasjonen av covariansen som følger:

$$S_{nn}(\Delta s, \omega) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{Cov}_{nn}(\Delta s, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (3.8)$$

Her er  $\tau$  en variabel fra null til uendelig i fouriertransformasjonen og ikke tidseparasjon som tidligere.

Det er vanlig (Strømmen 2010) å definere cross-spektraltettheten ved auto-spektraltettheten,  $S_n(\omega)$ , som tar hensyn til fordelingen over frekvenser og co-spektrumet,  $\hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, \omega)$ , som tar hensyn til den avtagende effekten av covariansen med økende separasjon. Den reduserte cross-spektraltettheten kan dermed skrives:

$$\hat{S}_{nn}(\Delta s, \omega) = \frac{S_n(\omega)}{\sigma_n^2} \hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, \omega) \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (3.9)$$

hvor co-spektrumet kan tilnærmes til eksponentialfunksjonen (Strømmen 2010):

$$\hat{C}_{o_{nn}}(\Delta s, \omega) = \exp\left(-c_{ns} \frac{\omega \cdot \Delta s}{V}\right) \quad \begin{cases} n = u, v, w \\ \Delta s = \Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f \end{cases} \quad (3.10)$$

En mye brukt beskrivelse av auto-spektraltettheten er Kaimal-spekteret som er gitt ved følgende uttrykk (Strømmen 2010):

$$\frac{\omega \cdot S_n(\omega)}{\sigma_n^2} = \frac{A_n \cdot \hat{\omega}_n}{(1 + 1,5 A_n \cdot \hat{\omega}_n)^{5/3}} \quad \text{der} \quad \hat{\omega}_n = \frac{\omega \cdot x_f L_n}{2\pi \cdot V} \quad \text{og} \quad n = u, v, w \quad (3.11)$$

Parameterne som beskriver turbulensen i Kaimal-spekteret er  $A_n$  og  $x_f L_n$ . Det er dermed kun turbulensen i retning av middelvinden som beskrives ved den karakteristiske lengden. Auto-spektraltettheten kan derfor sies å representere tidsvariasjonen i turbulensen. I motsetning til co-spektrumet som beskriver den romlige variasjonen til turbulensen og således tilsvarende covarians-koeffisienten i frekvensdomenet. Parameteren  $c_{ns}$  er dermed en størrelse som representerer de karakteristiske lengdene (for komponent  $n$ ) langs  $y_f$  og  $z_f$  i frekvensdomenet.

### 3.2 Buffeting teorien

Buffeting teorien beskriver lastene fra vinden som blåser rundt en konstruksjon. Vindfeltet rundt konstruksjonen er avhengig av vindhastighet, turbulens og konstruksjonens bevegelse.

Som nevnt tidligere er det naturlig å beskrive vinden som en sum av middelvind med en uavhengig varierende turbulens. Vindtrykket og lastene som virker på konstruksjonen kan dermed også beskrives med en middelferdi og en eller flere varierende komponenter. Lastene gir respons i form av forskyvninger, hvor de konstante middellastene gir en statisk respons og de varierende lastene gir en varierende dynamisk respons. Denne beregningsmåten, med superposisjon av laster og forskyvninger, er mulig når konstruksjonen og lastene er lineære. Dette er også en forutsetning for at responsen kan beregnes i frekvensplanet.

Lastene på grunn av vind er komplekse av natur og avhengig av interaksjonen mellom vindfeltet og konstruksjonen. Denne sammenhengen er vanskelig å beskrive teoretisk og derfor er modellforsøk i vindtunnel en forutsetning for å bestemme vindlastene.

For brokonstruksjoner som krysser en fjord eller lignende kan man anta at middelvindretningen er normalt på brobanen. Det er også vanlig å anta at vinden ikke gir laster som virker langs med brobanen (Strømmen 2010). Derfor er det bare vinden med turbulenskomponenter i middelvindretningen,  $u$ , og vertikal retning,  $w$ , som er av interesse. Nødvendige antagelser innebærer at lastene kan beregnes fra det momentane vindtrykket med tilhørende lastkoeffisienter fra statiske vindtunnelforsøk og at lineariseringer av varierende vindtrykk gir tilfredsstillende resultater. Andre nødvendige antagelser er beskrevet senere i utledningen.





$$\mathbf{q}_{tot}(x,t) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

der

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y} \right)$$

Det kan antas at turbulensen,  $u(x,t)$  og  $w(x,t)$ , er liten i forhold til middelvindhastigheten,  $V(x)$ . Det antas også at de varierende forskyvningene av tverrsnittet, inkludert de deriverte, er små. Med disse antagelsene kan vinkelen  $\beta$  antas liten slik at

$$\sin(\beta) \approx \tan(\beta) \approx \beta \approx \frac{w - \dot{r}_z}{V + u - \dot{r}_y} \approx \frac{w - \dot{r}_z}{V} \quad (3.14)$$

Uttrykket for  $V_{rel}^2$  kan skrives ved bruk av pytagoras teorem og lineariseres ved å stryke høyere ordens ledd med antatte små størrelser.

$$V_{rel}^2 = (V + u - \dot{r}_y)^2 + (w - \dot{r}_z)^2 \approx V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y \quad (3.15)$$

Ved å kombinere ligning (3.12), (3.14) og (3.15) kan ligning (3.13) med fordelte vindlaster i konstruksjonens akseretninger skrives som:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{w - \dot{r}_z}{V} & 0 \\ \frac{w - \dot{r}_z}{V} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \rho (V^2 + 2Vu - 2V\dot{r}_y) \begin{bmatrix} D \cdot C_D(\alpha) \\ B \cdot C_L(\alpha) \\ B^2 \cdot C_M(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \rho V \left( \frac{V}{2} + u - \dot{r}_y \right) \begin{bmatrix} DC_D(\alpha) + BC_L(\alpha) \left( -\frac{w - \dot{r}_z}{V} \right) \\ BC_L(\alpha) + DC_D(\alpha) \left( \frac{w - \dot{r}_z}{V} \right) \\ B^2 C_M(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Lastkoeffisientene  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  er ikke-lineært avhengige av angrepsvinkelen  $\alpha$  og lineariseres som følger:

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_D(\bar{\alpha}) \\ C_L(\bar{\alpha}) \\ C_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} C'_D(\bar{\alpha}) \\ C'_L(\bar{\alpha}) \\ C'_M(\bar{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Der  $\bar{\alpha}$  og  $\alpha_f$  er middelvei og varierende del av angrepsvinkelen.

Følgende notasjon innføres for enkelhetens skyld:

$$\begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \\ C_M(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{bmatrix} + \alpha_f \begin{bmatrix} C'_D \\ C'_L \\ C'_M \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Fra Figur 3-5 og ligning (3.14) ser man at

$$\alpha = \bar{r}_\theta + r_\theta + \beta \approx \bar{r}_\theta + r_\theta + \frac{w - \dot{r}_z}{V}$$

slik at

$$\bar{\alpha} = \bar{r}_\theta \quad \text{og} \quad \alpha_f = r_\theta + \frac{w - \dot{r}_z}{V} \quad (3.19)$$

Dette settes inn i ligning (3.16) ved at lastkoeffisientene i første ledd i hakeparentesen i ligning (3.16) erstattes med ligning (3.18) mens andre ledd erstattes med middelveien (første ledd) i ligning (3.18). Faktorisering og ordning av ledd gir:

$$\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} = \rho V \left( \frac{V}{2} + u - \dot{r}_y \right) \left\{ \begin{bmatrix} D\bar{C}_D \\ B\bar{C}_L \\ B^2\bar{C}_M \end{bmatrix} + \left( r_\theta + \frac{w - \dot{r}_z}{V} \right) \begin{bmatrix} DC'_D \\ BC'_L \\ B^2C'_M \end{bmatrix} + \left( \frac{w - \dot{r}_z}{V} \right) \begin{bmatrix} -B\bar{C}_L \\ D\bar{C}_D \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.20)$$

Videre multipliseres parentesene ut og uttrykket lineariseres ved å neglisjere høyere ordens ledd av antatte små størrelser.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} q_y \\ q_z \\ q_\theta \end{bmatrix}_{tot} &= \frac{\rho V^2}{2} B \begin{bmatrix} \frac{D}{B} \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B \bar{C}_M \end{bmatrix} + \frac{\rho V}{2} B \left( \begin{bmatrix} 2 \frac{D}{B} \bar{C}_D \\ 2 \bar{C}_L \\ 2 B \bar{C}_M \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \\ C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D \\ B C'_M \end{bmatrix} w \right) \\
&- \frac{\rho V}{2} B \left( \begin{bmatrix} 2 \frac{D}{B} \bar{C}_D \\ 2 \bar{C}_L \\ 2 B \bar{C}_M \end{bmatrix} \dot{r}_y + \begin{bmatrix} \frac{D}{B} C'_D - \bar{C}_L \\ C'_L + \frac{D}{B} \bar{C}_D \\ B C'_M \end{bmatrix} \dot{r}_z \right) + \frac{\rho V^2}{2} B \begin{bmatrix} \frac{D}{B} C'_D \\ C'_L \\ B C'_M \end{bmatrix} r_\theta
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ligning (3.21) ovenfor består av fire ledd. Det første er middelvindlasten, det andre er lasten på grunn av turbulens og de to siste leddene er bevegelsesinduserte krefter fra tverrsnittets hastighet og forskyvning. Dette kan skrives enklere på matriseform:

$$\mathbf{q}_{tot} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q \mathbf{v} + \mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \mathbf{r} \tag{3.22}$$

der  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix}^T$  og  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_y & r_z & r_\theta \end{bmatrix}^T$

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} (D/B) \bar{C}_D \\ \bar{C}_L \\ B \bar{C}_M \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{B}_q = \frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B) \bar{C}_D & (D/B) C'_D - \bar{C}_L \\ 2 \bar{C}_L & C'_L + (D/B) \bar{C}_D \\ 2 B \bar{C}_M & B C'_M \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{C}_{ae} = -\frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B) \bar{C}_D & (D/B) C'_D - \bar{C}_L & 0 \\ 2 \bar{C}_L & C'_L + (D/B) \bar{C}_D & 0 \\ 2 B \bar{C}_M & B C'_M & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho V^2 B}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (D/B) C'_D \\ 0 & 0 & C'_L \\ 0 & 0 & B C'_M \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

For å ta hensyn til frekvensen til vindfluktasjonen (turbulensen) som fører til trykkvariasjoner rundt tverrsnittet innføres såkalte tverrsnittsadmitansefunksjonene i matrisen  $\mathbf{B}_q$ . Ved høye frekvenser i turbulenten, dvs turbulent med rask retningsendring og dermed liten romlig utstrekning, vil ikke luftstrømmen fra turbulenten omslutte konstruksjonen og lastvirkningen blir dermed mindre. Tverrsnittsadmitansefunksjonene er bestemt ut fra modellforsøk og verdiene går mot én for lave turbulensfrekvenser (vindkast med stor utstrekning) og avtar mot null for høyere frekvenser (turbulens med liten utstrekning).  $\mathbf{B}_q$  kan dermed skrives:

$$\mathbf{B}_q(\omega) = \frac{\rho V B}{2} \begin{bmatrix} 2(D/B)\bar{C}_D \cdot A_{yu}(\omega) & ((D/B)C'_D - \bar{C}_L) \cdot A_{yw}(\omega) \\ 2\bar{C}_L \cdot A_{zu}(\omega) & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) \cdot A_{zw}(\omega) \\ 2B\bar{C}_M \cdot A_{\theta u}(\omega) & BC'_M \cdot A_{\theta w}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

hvor  $A_{ij}(\omega)$  er tverrsnittsadmitansefunksjonene.

Matrisene  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  tilsvarer de aerodynamiske deriverte. De aerodynamiske deriverte uttrykker bidragene til de bevegelses induserte kreftene fra tverrsnittets forskyvning og hastighet. For å bestemme samtlige aerodynamisk deriverte for et brotverrsnitt må modellforsøk i vindtunnel benyttes. Strømningsbildet rundt en konstruksjon påvirkes mye av utførelsen og det er vanlig å gjøre modellforsøk med utstyr og kjøretøy plassert på brobanen i tillegg til forsøk med et strippet tverrsnitt.

Normaliserte aerodynamisk deriverte innføres for å enkelt kunne skalere verdier fra modellskala til virkelig skala.

$$\mathbf{C}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} \omega_i(V) \cdot \hat{\mathbf{C}}_{ae} \quad \text{og} \quad \mathbf{K}_{ae} = \frac{\rho B^2}{2} (\omega_i(V))^2 \cdot \hat{\mathbf{K}}_{ae} \quad (3.28)$$

Her er egenfrekvensen,  $\omega_i(V)$ , avhengig av middelvindhastigheten. Index  $i$  refererer til tilhørende mode  $y$ ,  $z$  eller  $\theta$ . Det vil si at  $P_k^*$  multipliseres med  $\omega_y(V)$ ,  $H_k^*$  multipliseres med  $\omega_z(V)$  og  $A_k^*$  multipliseres med  $\omega_\theta(V)$ . Matrisene med de normaliserte aerodynamisk deriverte blir som følger:

$$\hat{\mathbf{C}}_{ae} = \begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & BP_2^* \\ H_5^* & H_1^* & BH_2^* \\ BA_5^* & BA_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{\mathbf{K}}_{ae} = \begin{bmatrix} P_4^* & P_6^* & BP_3^* \\ H_6^* & H_4^* & BH_3^* \\ BA_6^* & BA_4^* & B^2 A_3^* \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

De normaliserte aerodynamiske deriverte  $P_k^*, H_k^*$  og  $A_k^*$  er funksjoner av den reduserte middelvindhastigheten  $\hat{V} = V / (B \cdot \omega_i(V))$ . Denne variabelen er dimensjonsløs og dermed er det enkelt å skalere de normaliserte aerodynamiske deriverte fra modellskala til full størrelse.

Ved beregning av  $\mathbf{C}_{ae}$  og  $\mathbf{K}_{ae}$  må  $\omega_i(V)$  være kjent. Denne finnes ved å løse egenverdiproblemet hvor  $\mathbf{K}_{ae}$  inngår. Den aerodynamiske stivheten inngår her på begge sider i ligningen og ligningen må derfor løses ved bruk av iterasjoner.

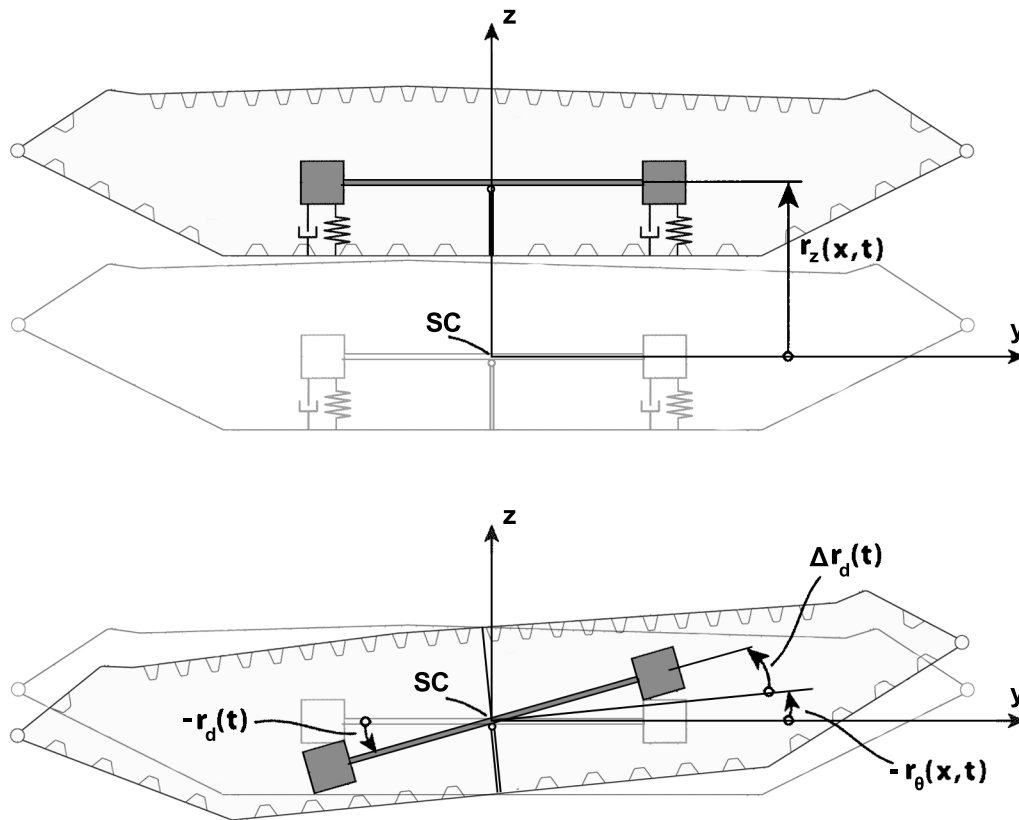
Uttrykkene i ligning (3.25) og (3.26) fra buffeting-teorien kalles kvasi-statiske aerodynamisk deriverte. De er utilfredsstillende ved beregning av respons ved høye vindhastigheter fordi forenklingene i teorien utelukker bevegelsesinduserte krefter fra rotasjonshastigheten til tverrsnittet,  $\dot{r}_\theta$ . Dermed er ikke aerodynamisk demping i torsjon ( $A_2^*$ ) definert. For vanlige brotverrsnitt er  $A_2^*$  negativ for høyere vindhastigheter og dermed et vesentlig bidrag til økende respons og stabilitetsproblemet.



## 4 Dynamisk analyse for aerodynamisk stabilitet

I dette kapitlet utvikles teorien for responsberegning av en brokonstruksjon med en massedemper montert på et gitt punkt langs brokonstruksjonen. Tidligere i oppgaven er teorien bak de ulike elementene presentert. Her sammenfattes og kombineres dette til en helhetlig responsberegning som inkluderer laster fra buffeting-teorien, bevegelsesinduserte laster gitt av de aerodynamisk deriverte og dempningen introdusert av massedemperen. Likevektsligningen for systemet med massedemperen er utviklet ved bruk av d'Alembert prinsipp og virtuelle forskyvningers prinsipp, forklart nærmere i kapittel 2.2.

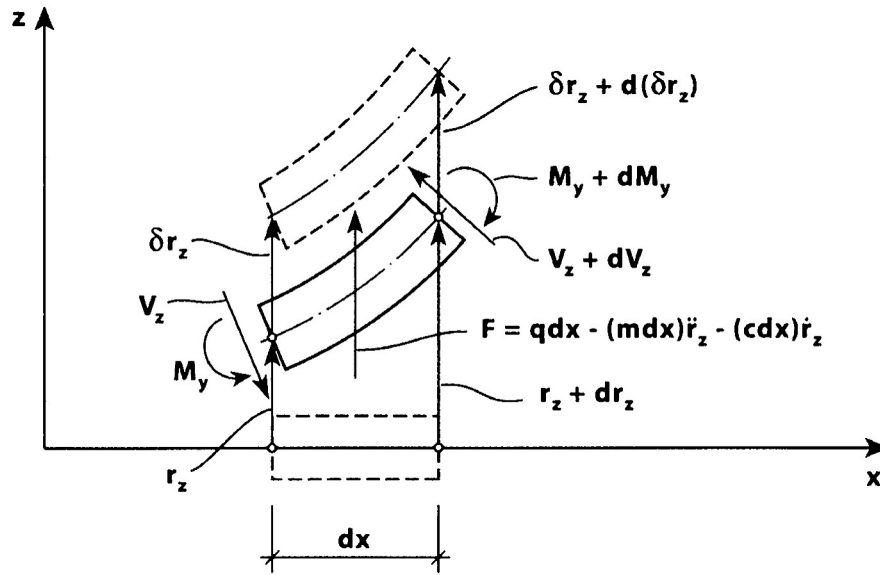
Responsberegningen er utviklet med tanke på å bestemme stabilitetsgrensen til konstruksjonen, vindhastigheten hvor responsen øker uhemmet. Det er derfor ikke lagt vekt på å oppnå nøyaktige resultater for lave vindhastigheter. Flutterfenomenet oppstår som økende rotasjonssvingninger i egensvingeformen med lavest egenfrekvens. Ved økende vindhastighet vil egenfrekvensen bli lavere og nærme seg egenfrekvensen til den vertikale egensvingeformen som er mest formlik. Ved kritisk vindhastighet er den vertikale svingningen og rotasjonssvingningen koblet sammen til en felles bevegelse med samme egenfrekvens. Øvrige egensvingeformer er neglisjerbare ved vindhastigheter nær stabilitetsgrensen og de to modene som kobles sammen er dermed tilstrekkelig for å beregne flutterresponsen. De to egensvingeformene gir to frihetsgrader i systemet. I tillegg er det inkludert en massedemper som gir en ekstra frihetsgrad. Massedemperen er konstruert slik at den kun demper rotasjonssvingninger til tverrsnittet. Frihetsgradene til systemet er vist i Figur 4-1.



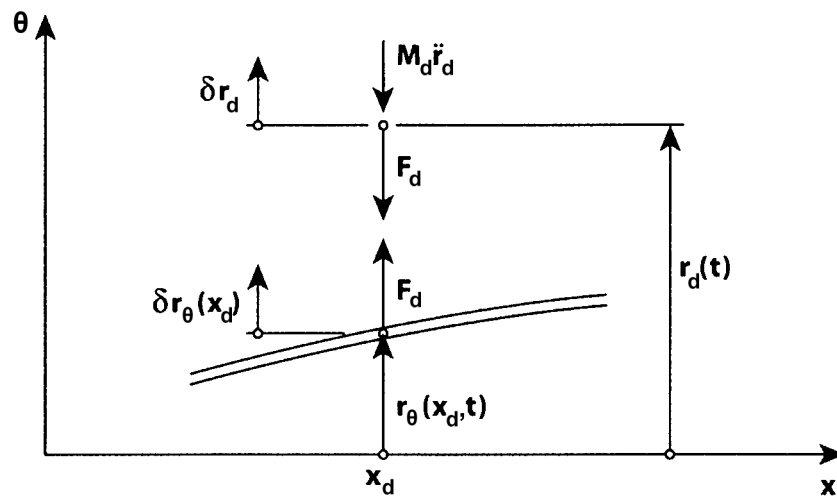
Figur 4-1: Øverste figur viser vertikal frihetsgrad,  $r_z$ . Nederste figur viser frihetsgrader for rotasjon,  $r_\theta$ , og massedemper,  $r_d$ , samt relativ frihetsgrad for massedemperen,  $\Delta r_d$ . Minustegnet er vist for å være konsistent med definisjonen i kapittel 3.2. Statistiske forskyvninger er ikke vist i figurene.

Fra d'Alembert's prinsipp kan kreftene som virker på brobanen ved vertikal deformasjon og bevegelse settes opp som vist i Figur 4-2. Tilsvarende kan settes opp for deformasjon og bevegelse i rotasjon. Dette er ikke vist i figur, men er ekvivalent med Figur 4-2, bortsett fra at indre krefter erstattes med torsjonsmomenter. Kreftene som virker på massedemperen og mellom massedemperen og brobanen er på tilsvarende måte vist i Figur 4-3. Forskyvningene i figuren,  $r_\theta(x,t)$  og  $r_d(t)$  for henholdsvis brobanen og massedemperen, er begge rotasjoner om x-aksen. De tilhørende kreftene er således momenter om samme akse.

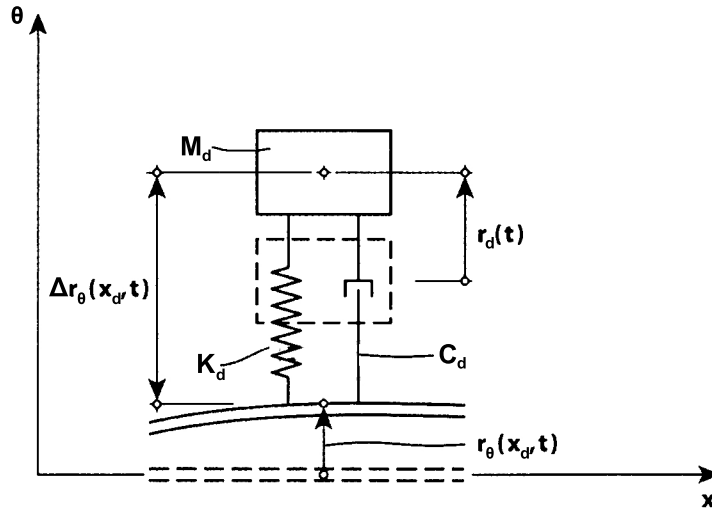




Figur 4-2: Ytre og indre krefter for vertikal egensvingeform fra d'Alembert's prinsipp. (Strømmen 2013)



Figur 4-3: Massekrefter som virker på TMD og krefter mellom TMD og brobane fra d'Alembert's prinsipp. (Strømmen 2013)



Figur 4-4: Krefter mellom massedemperen og brobanen. (Strømmen 2013)

Ved å sette opp en arbeidslikevekt etter virtuelle forskyvningers prinsipp, der virtuelt arbeid utført av ytre krefter er lik virtuelt arbeid utført av indre krefter, får man følgende uttrykk.

$$\begin{aligned}
 & \int_L \left[ q_{z_{tot}}(x, t) - m_z(x) \ddot{r}_z(x, t) - c_z(x) \dot{r}_z(x, t) \right] \delta r_z(x) dx \\
 & + \int_L \left[ q_{\theta_{tot}}(x, t) - m_{\theta}(x) \ddot{r}_{\theta}(x, t) - c_{\theta}(x) \dot{r}_{\theta}(x, t) \right] \delta r_{\theta}(x) dx \\
 & + F_d(t) \delta r_{\theta}(x_d) - \left[ M_d \ddot{r}_d(t) + F_d(t) \right] \delta r_d \\
 & = \int_0^L EI_y r_z'' \cdot \delta r_z'' + \bar{N} r_z' \cdot \delta r_z' dx + \int_0^L \left( GI_T r_{\theta}' + \bar{N} e_p^2 r_{\theta}' \right) \delta r_{\theta}' dx
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Her er  $\delta r_z$ ,  $\delta r_{\theta}$  og  $\delta r_d$  virtuelle forskyvninger og  $F_d$  er kraften som virker mellom brobanen og massedemperen. Denne kraften avhenger av stivhets- og dempningsparameteren ( $K_d$  og  $C_d$ ) til massedemperen og den relative rotasjonen mellom dem, vist i Figur 4-4.

$$\begin{aligned}
 F_d(t) &= C_d \left[ \dot{r}_d(t) - \dot{r}_{\theta}(x_d, t) \right] + K_d \left[ r_d(t) - r_{\theta}(x_d, t) \right] \\
 &= C_d \dot{r}_d(t) + K_d r_d(t) - \left\{ C_d \dot{r}_{\theta}(x_d, t) + K_d r_{\theta}(x_d, t) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}
& \int_L m_z \ddot{r}_z(x,t) \delta r_z(x) dx + \int_L c_z \dot{r}_z(x,t) \delta r_z(x) dx \\
& + \int_L EI_y r_z''(x,t) \delta r_z'(x) + \bar{N} r_z'(x,t) \delta r_z'(x) dx \\
& + \int_L m_\theta \ddot{r}_\theta(x,t) \delta r_\theta(x) dx + \int_L c_\theta \dot{r}_\theta(x,t) \delta r_\theta(x) dx \\
& + \int_L \left( GI_T r_\theta'(x,t) + \bar{N} e_p^2 r_\theta'(x,t) \right) \delta r_\theta'(x) dx \\
& - \left[ C_d \dot{r}_d(t) + K_d r_d(t) - \left\{ C_d \dot{r}_\theta(x_d, t) + K_d r_\theta(x_d, t) \right\} \right] \delta r_\theta(x_d) \\
& + \left[ M_d \ddot{r}_d(t) + C_d \dot{r}_d(t) + K_d r_d(t) - \left\{ C_d \dot{r}_\theta(x_d, t) + K_d r_\theta(x_d, t) \right\} \right] \delta r_d \\
& = \int_L q_{z_{tot}}(x,t) \delta r_z(x) dx + \int_L q_{\theta_{tot}}(x,t) \delta r_\theta(x) dx
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Introduserer modale frihetsgrader for reelle og virtuelle frihetsgrader. Det antas her at modene består av kun en komponent, vertikal forskyvning ( $z$ ) eller rotasjon ( $\theta$ ).

$$\begin{aligned}
r_z(x,t) &= \varphi_z(x) \eta_z(t) & \delta r_z(x) &= \varphi_z(x) \delta \eta_z \\
r_\theta(x,t) &= \varphi_\theta(x) \eta_\theta(t) & \delta r_\theta(x) &= \varphi_\theta(x) \delta \eta_\theta \\
r_d(t) &= 1 \cdot \eta_d(t) & \delta r_d &= 1 \cdot \delta \eta_d
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ligning (4.3) på modal form blir dermed:

$$\begin{aligned}
& \int_L m_z \varphi_z(x) \ddot{\eta}_z(t) \varphi_z(x) \delta \eta_z dx + \int_L c_z \varphi_z(x) \dot{\eta}_z(t) \varphi_z(x) \delta \eta_z dx \\
& + \int_L EI_y \varphi_z''(x) \eta_z(t) \varphi_z'(x) \delta \eta_z dx + \int_L \bar{N} \varphi_z'(x) \eta_z(t) \varphi_z'(x) \delta \eta_z dx \\
& + \int_L m_\theta \varphi_\theta(x) \ddot{\eta}_\theta(t) \varphi_\theta(x) \delta \eta_\theta dx + \int_L c_\theta \varphi_\theta(x) \dot{\eta}_\theta(t) \varphi_\theta(x) \delta \eta_\theta dx \\
& + \int_L GI_T \varphi_\theta'(x) \eta_\theta(t) \varphi_\theta'(x) \delta \eta_\theta dx + \int_L \bar{N} e_p^2 \varphi_\theta'(x) \eta_\theta(t) \varphi_\theta'(x) \delta \eta_\theta dx \\
& - \left[ C_d \dot{\eta}_d(t) + K_d \eta_d(t) - \left\{ C_d \varphi_\theta(x_d) \dot{\eta}_\theta(t) + K_d \varphi_\theta(x_d) \eta_\theta(t) \right\} \right] \varphi_\theta(x_d) \delta \eta_\theta \\
& + \left[ M_d \ddot{\eta}_d(t) + C_d \dot{\eta}_d(t) + K_d \eta_d(t) - \left\{ C_d \varphi_\theta(x_d) \dot{\eta}_\theta(t) + K_d \varphi_\theta(x_d) \eta_\theta(t) \right\} \right] \delta \eta_d \\
& = \int_L q_{z_{tot}}(x,t) \varphi_z(x) \delta \eta_z dx + \int_L q_{\theta_{tot}}(x,t) \varphi_\theta(x) \delta \eta_\theta dx
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dette kan skrives på matriseform:

$$\delta\boldsymbol{\eta}^T \left[ \tilde{\mathbf{M}}_0 \ddot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) + \tilde{\mathbf{C}}_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) + \tilde{\mathbf{K}}_0 \boldsymbol{\eta}_0(t) \right] = \delta\boldsymbol{\eta}^T \tilde{\mathbf{R}}_0(t)$$

$$\boldsymbol{\eta}_0(t) = \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \delta\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \delta\eta_z \\ \delta\eta_\theta \\ \delta\eta_d \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

hvor  $\delta\boldsymbol{\eta}^T$  er vilkårlig og kan strykes ved å pre-multiplisere med  $(\delta\boldsymbol{\eta}^T)^{-1}$ . Dermed blir likevektsligningen:

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 \ddot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) + \tilde{\mathbf{C}}_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}_0(t) + \tilde{\mathbf{K}}_0 \boldsymbol{\eta}_0(t) = \tilde{\mathbf{R}}_0(t) \quad (4.7)$$

Der matrisene er definert som følger:

$$\tilde{\mathbf{M}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & M_d \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{der} \quad \begin{bmatrix} \tilde{M}_z \\ \tilde{M}_\theta \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} \varphi_z^2(x) m_z \\ \varphi_\theta^2(x) m_\theta \end{bmatrix} dx$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_\theta + C_d \varphi_\theta^2(x_d) & -C_d \varphi_\theta(x_d) \\ 0 & -C_d \varphi_\theta(x_d) & C_d \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\text{der} \quad \begin{bmatrix} \tilde{C}_z \\ \tilde{C}_\theta \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} \varphi_z^2(x) c_z \\ \varphi_\theta^2(x) c_\theta \end{bmatrix} dx$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{tot,z} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{tot,\theta} + K_d \varphi_\theta^2(x_d) & -K_d \varphi_\theta(x_d) \\ 0 & -K_d \varphi_\theta(x_d) & K_d \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\text{der} \quad \begin{bmatrix} \tilde{K}_{tot,z} \\ \tilde{K}_{tot,\theta} \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} [\varphi_z''(x)]^2 EI_y + [\varphi_z'(x)]^2 \bar{N} \\ [\varphi_\theta'(x)]^2 GI_T + [\varphi_\theta'(x)]^2 \bar{N} e_p^2 \end{bmatrix} dx$$

Som tidligere nevnt er det ikke nødvendig å beregne den modale stivheten når modal masse og egenfrekvenser er kjent fra løsningen av egenverdi-problemet. Den modale stivheten er alternativt gitt ved:

$$\tilde{K}_{tot,i} = \omega_i^2 \tilde{M}_i \quad \text{hvor} \quad i = z, \theta \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{R}_z \\ \tilde{R}_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad \begin{bmatrix} \tilde{R}_z \\ \tilde{R}_\theta \end{bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} \varphi_z(x) q_{z_{tot}}(x,t) \\ \varphi_\theta(x) q_{\theta_{tot}}(x,t) \end{bmatrix} dx \quad (4.12)$$

Det er hensiktsmessig å innføre en relativ frihetsgrad for massedemperen og transformere ligning (4.7) med tilhørende matriser til relative frihetsgrader. Det viser seg da at  $\tilde{\mathbf{K}}$  og  $\tilde{\mathbf{C}}$  blir diagonale, noe som er en fordel i den videre beregningen. Sammenhengen mellom absolutte og relative frihetsgrader er:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_z(x,t) \\ r_\theta(x,t) \\ r_d(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_z(x,t) \\ r_\theta(x,t) \\ r_\theta(x_d,t) + \Delta r_d(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x) & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x_d) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dermed blir

$$\begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x) & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x_d) & 1 \end{bmatrix}}_{\Psi} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Matriseproduktet i ligning (4.14) blir transformasjonsmatrisen og vektoren med frihetsgradene inkludert relativ massedemper-frihetsgrad,  $\Delta \eta_d$ , defineres  $\boldsymbol{\eta}(t)$ .

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x_d) & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \Delta\eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Ved å skrive likevektsligningen (4.7) i relative frihetsgrader og premultiplisere med  $\boldsymbol{\psi}^T$  blir ligningen med matriser som følger:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\psi}^T \tilde{\mathbf{M}}_0 \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_z & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_\theta + \varphi_\theta^2(x_d)M_d & \varphi_\theta(x_d)M_d \\ 0 & \varphi_\theta(x_d)M_d & M_d \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\psi}^T \tilde{\mathbf{C}}_0 \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & C_d \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\psi}^T \tilde{\mathbf{K}}_0 \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{tot,z} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{tot,\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_d \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\psi}^T \tilde{\mathbf{R}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{R}_z \\ \tilde{R}_\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}_0 \quad (4.20)$$

Den modale lastvektoren,  $\tilde{\mathbf{R}}$ , består av laster fra vindturbulens og bevegelsesinduserte laster. Fra buffeting-teorien beskrevet i kapittel 3.2, kan lastene beskrives som følger:

$$\mathbf{q}_{tot} = \underbrace{\mathbf{B}_q \mathbf{v}}_{\mathbf{q}_v} + \underbrace{\mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \mathbf{r}}_{\mathbf{q}_{ae}} \quad (4.21)$$

der

$$\mathbf{q}_{tot} = \begin{bmatrix} q_{z_{tot}}(x,t) \\ q_{\theta_{tot}}(x,t) \\ q_d(t) = 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_z \\ r_\theta \\ r_d \end{bmatrix}$$

På grunn av at det ikke er noen ytre last på massedemperen, blir  $q_d = 0$ .  
Matrisene er utledet i kapittel 3.2 og gjengitt her med tilpasninger til valgte frihetsgrader.

$$\mathbf{B}_q(\omega) = \frac{\rho VB}{2} \begin{bmatrix} 2\bar{C}_L \cdot A_{zu} & (C'_L + (D/B)\bar{C}_D) \cdot A_{zw} \\ 2B\bar{C}_M \cdot A_{\theta u} & BC'_M \cdot A_{\theta w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\rho VB}{2} \hat{\mathbf{B}}_q(\omega) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{C}_{ae} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 \\ A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ae} = \begin{bmatrix} H_4 & H_3 & 0 \\ A_4 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De modale frihetsgradene som ble innført i ligning (4.4) kan skrives på matriseform som følger:

$$\mathbf{r}(x,t) = \begin{bmatrix} r_z(x,t) \\ r_\theta(x,t) \\ r_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \eta_d(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(x) \boldsymbol{\eta}_0(t) \quad (4.23)$$

Der kolonnene i matrisen er modene er definert som  $\varphi_i$  slik at  $\mathbf{\Phi}$  kan skrives:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_z & \varphi_\theta & \varphi_d \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Den modale lastvektoren fra ligning (4.12) kan dermed skrives som følger ved å innføre modale frihetsgrader for bevegelsesinduserte krefter,  $\mathbf{q}_{ae}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_0(t) &= \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{q}_{tot}(x,t) dx = \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{q}_v(x,t) dx + \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{q}_{ae}(x,t) dx \\ &= \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_q \mathbf{v}(x,t) dx + \int_L \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{C}_{ae} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_{ae} \mathbf{r}) dx \\ &= \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_q \mathbf{v}(x,t) dx + \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ae} \mathbf{\Phi} \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 dx + \int_L \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}_{ae} \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\eta}_0 dx \end{aligned} \quad (4.25)$$

På grunn av at det ikke er last på massedemperen vil ikke transformasjonen til relative frihetsgrader forandre matrisene, jmf ligning (4.20). Dermed kan modal lastvektor i relative frihetsgrader skrive:

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \underbrace{\int_L \Phi^T \mathbf{B}_q \mathbf{v} dx}_{\tilde{\mathbf{R}}_v} + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_{ae} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_{ae} \boldsymbol{\eta}(t)}_{\tilde{\mathbf{R}}_{ae}} \quad (4.26)$$

der de modale matrisene for aerodynamisk stivhet og dempning er definert som følger.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{ae} &= \int_L \begin{bmatrix} \varphi_z^2 H_1 & \varphi_\theta \varphi_z H_2 & 0 \\ \varphi_z \varphi_\theta A_1 & \varphi_\theta^2 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ae} &= \int_L \begin{bmatrix} \varphi_z^2 H_4 & \varphi_\theta \varphi_z H_3 & 0 \\ \varphi_z \varphi_\theta A_4 & \varphi_\theta^2 A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

De aerodynamisk deriverte er avhengig av egenfrekvensen til konstruksjonen i vindfeltet,  $\omega_i(V)$ . Derfor må aerodynamisk dempning og stivhet,  $\tilde{\mathbf{C}}_{ae}$  og  $\tilde{\mathbf{K}}_{ae}$ , beregnes ved bruk av iterasjoner. Det er mulig å unngå iterasjoner ved å beregne responsen skrittvis for økende middelvindhastigheter og benytte verdien for  $\omega_i(V)$  fra det forrige middelvindhastighet-skrittet for å bestemme aerodynamisk dempning og stivhet.

Ved å ta fouriertransformasjon av ligning (4.16) kan responsberegningen gjøres i frekvensplanet.

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\eta}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{R}}(t) = \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{R}}_v}(\omega) e^{i\omega t} + \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{R}}_{ae}}(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.28)$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\eta}(\omega) &= \begin{bmatrix} a_{\eta_z} \\ a_{\eta_\theta} \\ a_{\eta_d} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{R}}_v}(\omega) &= \int_L \Phi^T \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v dx \quad \text{med} \quad \mathbf{a}_v(\omega) = \begin{bmatrix} a_u \\ a_w \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{\tilde{\mathbf{R}}_{ae}}(\omega) &= (i\omega \tilde{\mathbf{C}}_{ae} + \tilde{\mathbf{K}}_{ae}) \mathbf{a}_{\eta} \end{aligned} \quad (4.29)$$



Ligning (4.28) og (4.29) settes inn i likevektsligningen (4.16):

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}} + i\omega \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{a}_\eta e^{i\omega t} &= \mathbf{a}_{\tilde{R}_v} e^{i\omega t} + (i\omega \tilde{\mathbf{C}}_{ae} + \tilde{\mathbf{K}}_{ae}) \mathbf{a}_\eta e^{i\omega t} \\ [-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}} + i\omega (\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{C}}_{ae}) + (\tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{K}}_{ae})] \mathbf{a}_\eta &= \mathbf{a}_{\tilde{R}_v} \end{aligned}$$

Pre-multipliserer med  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  gir:

$$[-\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} + i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{C}}_{ae}) + \tilde{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{K}}_{ae})] \mathbf{a}_\eta = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_v} \quad (4.30)$$

For enkelhets skyld innføres reduserte lastkoeffisienter:

$$\mathbf{a}_{\tilde{R}_v} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{a}_{\tilde{R}_v} \quad (4.31)$$

Dermed blir

$$\mathbf{a}_\eta = \hat{\mathbf{H}}(\omega) \mathbf{a}_{\tilde{R}_v} \quad (4.32)$$

Uttrykket for frekvens-respons-matrisen,  $\hat{\mathbf{H}}$ , i ligning (4.32) kan ganges ut og skrives med fem ledd som følger:

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = [-\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} + i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} - i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae} + \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{ae}]^{-1} \quad (4.33)$$

I de følgende avsnittene vil disse fem leddene bli forenklet. Det første leddet, masseleddet, blir fullt utskrevet som følger:

$$\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} = \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\tilde{M}_z}{\tilde{K}_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{M}_\theta + \varphi_\theta^2(x_d) M_d}{\tilde{K}_\theta} & \frac{\varphi_\theta(x_d) M_d}{\tilde{K}_\theta} \\ 0 & \frac{\varphi_\theta(x_d) M_d}{K_d} & \frac{M_d}{K_d} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Ved å innføre  $\omega_i^2 = \tilde{K}_i / \tilde{M}_i$  der  $i = z, \theta$ , og  $d$ , og  $\mu = M_d / \tilde{M}_\theta$  kan matrisen skrives om til:

$$\begin{aligned}
\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} &= \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_\theta^2} + \mu \frac{\varphi_\theta^2(x_d)}{\omega_\theta^2} & \mu \frac{\varphi_\theta(x_d)}{\omega_\theta^2} \\ 0 & \frac{\varphi_\theta(x_d)}{\omega_d^2} & \frac{1}{\omega_d^2} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{\omega_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{\omega_d^2} \end{bmatrix}}_{\hat{\omega}^2} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \varphi_\theta^2(x_d) & \mu \varphi_\theta(x_d) \\ 0 & \varphi_\theta(x_d) & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}} \right) \quad (4.35) \\
\omega^2 \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} &= \hat{\omega}^2 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu})
\end{aligned}$$

Det neste leddet er dempningsdelen som skrevet ut blir:

$$i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} = i\omega \begin{bmatrix} \frac{\tilde{C}_z}{\tilde{K}_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{C}_\theta}{\tilde{K}_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_d}{K_d} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Ved å innføre  $\zeta_i$ , dempningsforholdet av kritisk dempning gitt ved  $\tilde{C}_i = 2\tilde{M}_i\omega_i\zeta_i$  der  $i = z, \theta$  og  $d$ , oppnås følgende forenkling:

$$\begin{aligned}
i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} &= 2i\omega \begin{bmatrix} \frac{\tilde{M}_z \omega_z}{\tilde{K}_z} \zeta_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{M}_\theta \omega_\theta}{\tilde{K}_\theta} \zeta_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_d \omega_d}{K_d} \zeta_d \end{bmatrix} \\
&= 2i\omega \begin{bmatrix} \frac{\zeta_z}{\omega_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_\theta}{\omega_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta_d}{\omega_d} \end{bmatrix} \\
&= 2i \begin{bmatrix} \frac{\omega}{\omega_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega}{\omega_d} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_z & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_d \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\zeta}} \\
i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} &= 2i\hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\zeta}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Det tredje leddet beskriver aerodynamiske krefter på grunn av hastigheten til tverrsnittet. Ved å innføre  $\boldsymbol{\zeta}_{ae} = 1/2 \text{diag}(\omega_i) (\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae})$  blir:

$$\begin{aligned}
i\omega \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_{ae} &= 2i \frac{\omega}{\text{diag}(\omega_i)} \boldsymbol{\zeta}_{ae} \\
&= 2i \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{ae}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Det fjerde leddet er stivhetsbidraget. Dette blir lik identitetsmatrisen,  $\mathbf{I}$ . Det siste leddet beskriver aerodynamiske laster pga. forskyvninger og defineres som:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{ae} = \boldsymbol{\kappa}_{ae} \tag{4.39}$$

Ved å sette (4.35)-(4.39) inn i ligning (4.33) oppnås følgende enkle uttrykk:

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = \left[ (\mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa}_{ae}) - \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}) + 2i\hat{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_{ae}) \right]^{-1} \quad (4.40)$$

Alle matrisene i ligning (4.40) er definert ovenfor. Den første parentesene inneholder alle stivhetsbidragene, både strukturelle og aerodynamiske stivheter, den andre parentesene inneholder massebidragene inkludert massedempningen, mens den siste parentesene inneholder dempningsbidragene inkludert aerodynamisk demping.

For å finne standardavviket til responsen beregnes respons-spektraltettheten (fordelingen). Integralet over hele frekvensspekteret gir variansen som er kvadratet av standardavviket.

Respons-spektraltettheten er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\eta(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_\eta^* \cdot \mathbf{a}_\eta^T) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \left[ \hat{\mathbf{H}}(\omega) \mathbf{a}_{\hat{R}_v} \right]^* \cdot \left[ \hat{\mathbf{H}}(\omega) \mathbf{a}_{\hat{R}_v} \right]^T \right) \\ &= \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_{\hat{R}_v}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{R}_v}^T) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \\ &= \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \mathbf{S}_{\hat{R}_v}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Hvor spektraltettheten til den reduserte turbulenslasten er:

$$\mathbf{S}_{\hat{R}_v}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{\hat{R}_z}^* \\ a_{\hat{R}_\theta}^* \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\hat{R}_z} & a_{\hat{R}_\theta} & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots \\ & S_{\hat{R}_i \hat{R}_j} & \\ \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Her er  $\mathbf{S}_{\hat{R}_v}$  en 3 x 3 matrise hvor siste kolonne og nederste rad er null fordi det ikke virker noen vindlast på massedempningen. Dermed er  $i, j = z, \theta$ .

Ved å sette inn uttrykk for  $a_{\hat{R}_{i/j}}$  fra ligning (4.31) og (4.29) får man:

$$\begin{aligned}
S_{\hat{R}_{v,i}\hat{R}_{v,j}}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( a_{\hat{R}_{v,i}}^*(\omega) \cdot a_{\hat{R}_{v,j}}^T(\omega) \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \frac{\int_L \boldsymbol{\Phi}_i^T(x) \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v^*(x, \omega) dx}{\tilde{K}_i} \cdot \frac{\int_L [\boldsymbol{\Phi}_j^T(x) \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v(x, \omega)]^T dx}{\tilde{K}_j} \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left( \frac{\iint_L [\boldsymbol{\Phi}_i^T(x_1) \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v^*(x_1, \omega)] \cdot [\boldsymbol{\Phi}_j^T(x_2) \mathbf{B}_q \mathbf{a}_v(x_2, \omega)]^T dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)(\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \right) \quad (4.43) \\
&= \frac{\iint_L \boldsymbol{\Phi}_i^T(x_1) \mathbf{B}_q \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} (\mathbf{a}_v^*(x_1, \omega) \cdot \mathbf{a}_v^T(x_2, \omega)) \mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\Phi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)(\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \\
&= \frac{\iint_L \boldsymbol{\Phi}_i^T(x_1) \mathbf{B}_q \mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) \mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\Phi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)(\omega_j^2 \tilde{M}_j)}
\end{aligned}$$

der  $\Delta x = |x_1 - x_2|$  og  $\boldsymbol{\Phi}_i$  er kolonnene i  $\boldsymbol{\Phi}$ -matrisen definert i ligning (4.23).

Det gjenstår å utvikle et uttrykk for  $\mathbf{S}_v(\Delta x, \omega)$  som er spektraltettheten til vindturbulensen. Dette er utfyllende beskrevet i kapittel 3.1. Ved å se bort fra eventuelle koblinger mellom horisontal og vertikal turbulens, det vil si  $S_{uw}(\Delta x, \omega) = S_{wu}(\Delta x, \omega) = 0$ , blir spektraltettheten en diagonal matrise.

$$\mathbf{S}_v(\Delta x, \omega) = V^2 \mathbf{I}_v \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) \quad (4.44)$$

hvor  $V$  er middelvindhastigheten og

$$\mathbf{I}_v = \text{diag} \begin{bmatrix} I_u & I_w \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) = \text{diag} \begin{bmatrix} \frac{S_{uu}}{\sigma_u^2} & \frac{S_{ww}}{\sigma_w^2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Ved å innføre den reduserte buffetingmatrisen som gitt i ligning (4.22) får man:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\hat{R}_{vj}\hat{R}_{vj}}(\omega) &= \left( \frac{\rho V^2 B}{2} \right)^2 \frac{\iint_L \boldsymbol{\varphi}_i^T(x_1) \hat{\mathbf{B}}_q \left[ \mathbf{I}_v^2 \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) \right] \hat{\mathbf{B}}_q^T \boldsymbol{\varphi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{(\omega_i^2 \tilde{M}_i)(\omega_j^2 \tilde{M}_j)} \\ &= \frac{\rho B^3}{2} \frac{\rho B^3}{2} \left( \frac{V}{B\omega_i} \right)^2 \left( \frac{V}{B\omega_j} \right)^2 \frac{1}{\tilde{M}_i} \frac{1}{\tilde{M}_j} J_{ij}^2(\omega) \end{aligned} \quad (4.46)$$

der den såkalte "joint acceptance function" er

$$J_{ij}^2(\omega) = \iint_L \boldsymbol{\varphi}_i^T(x_1) \hat{\mathbf{B}}_q \left[ \mathbf{I}_v^2 \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) \right] \hat{\mathbf{B}}_q^T \boldsymbol{\varphi}_j(x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.47)$$

Joint acceptance function overfører den kompliserte lastsituasjonen på grunn av turbulens til en gjennomsnittlig modal last for hver egensvingeform. Dette skjer i frekvensdomenet og funksjonen beskriver ved hvilke frekvenser turbulenslasten påvirker de ulike modene. Dobbeltintegralet over lengden av konstruksjonen gjør at turbulensens co-variasjon langs konstruksjonen ivaretas ved en romlig gjennomsnittsbetraktning.

Ved å innføre følgende reduserte modale masser:

$$\tilde{m}_i = \frac{\tilde{M}_i}{\int_L \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i dx} \quad \text{og} \quad \tilde{m}_j = \frac{\tilde{M}_j}{\int_L \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j dx} \quad (4.48)$$

Får man:

$$\mathbf{S}_{\hat{R}_{vj}\hat{R}_{vj}}(\omega) = \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_i} \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_j} \left( \frac{V}{B\omega_i} \right)^2 \left( \frac{V}{B\omega_j} \right)^2 \hat{J}_{ij}^2(\omega) \quad (4.49)$$

Det presiseres her at  $\omega_{i/j}$  kommer fra normaliseringen (pre-multipliseringen) med  $\mathbf{K}^{-1}$ . Denne representerer systemets strukturelle stivhet og er derfor ikke avhengig av middelvindhastigheten.

Den reduserte joint acceptance function i ligning (4.49) blir:

$$\hat{J}_{ij}^2(\omega) = \frac{\iint \boldsymbol{\varphi}_i^T(x_1) \hat{\mathbf{B}}_q \left[ \mathbf{I}_v^2 \hat{\mathbf{S}}_v(\Delta x, \omega) \right] \hat{\mathbf{B}}_q^T \boldsymbol{\varphi}_j(x_2) dx_1 dx_2}{\int_L \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i dx \cdot \int_L \boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j dx} \quad (4.50)$$

For beregning av flutterresponsen kan det gjøres flere antagelser som forenkler antall ledd i ligning (4.50). Antagelsene gjelder lastdelen av uttrykket,  $\mathbf{B}_q$ , det vil si lastene som opptrer på grunn av turbulens. For det første er tverrsnittsadmitansfunksjonene utelatt. Dette påvirker responsen i liten grad ved store vindhastigheter. Videre er det vanlig, i følge Strømmen (2010), å anta følgende lastkoeffisienter ved beregning av respons for broer med et strømlinjeformet tverrsnitt:

$$\left. \begin{matrix} \bar{C}_D \\ C'_L \\ C'_M \end{matrix} \right\} \neq 0, \quad \left. \begin{matrix} C'_D \\ \bar{C}_L \\ \bar{C}_M \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{D}{B} \bar{C}_D \ll C'_L \quad (4.51)$$

Det er tidligere antatt at horisontale forskyvninger ikke er interessant for flutterresponsen og derfor er drag-koeffisientene,  $\bar{C}_D$  og  $C'_D$ , som gir laster i horisontal retning utelatt. Ved å neglisjere flere lastkoeffisienter, som gitt i antagelsen i ligning (4.51), blir ytterligere laster utelatt. Det gjelder de vertikale lastene og momentlastene som skyldes turbulens i retning av middelvindhastigheten,  $u$ -komponenten. Det er dermed kun lastene fra vertikal turbulens,  $w$ -komponenten som regnes med. Det må nevnes at de bevegelsesinduserte kreftene, som beskrives av de aerodynamisk deriverte, ikke påvirkes av denne forenklingen.

Buffeting-matrisen i ligning (4.22) blir dermed:

$$\hat{\mathbf{B}}_q = \begin{bmatrix} 0 & C'_L \\ 0 & B C'_M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Ved å innføre vindturbulensens auto-spektraltetthet og co-spektrum som gitt i kapittel 3.1, kan uttrykkene for joint acceptance function i ligning (4.50) skrives ut for alle modene inkludert kobling mellom modene.

$$\hat{J}_{zz}^2(\omega) = \left( \frac{C'_L}{V} \right)^2 S_w(\omega) \frac{\iint \varphi_z(x_1) \varphi_z(x_2) \hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega) dx_1 dx_2}{\int_L \varphi_z^2(x) dx \cdot \int_L \varphi_z^2(x) dx} \quad (4.53)$$

$$\hat{J}_{\theta z}^2(\omega) = \hat{J}_{z\theta}^2(\omega) = \frac{C'_L \cdot BC'_M}{V^2} S_w(\omega) \frac{\iint \varphi_z(x_1) \varphi_\theta(x_2) \hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega) dx_1 dx_2}{\int_L \varphi_z^2(x) dx \cdot \int_L \varphi_\theta^2(x) dx} \quad (4.54)$$

$$\hat{J}_{\theta\theta}^2(\omega) = \left( \frac{BC'_M}{V} \right)^2 S_w(\omega) \frac{\iint \varphi_\theta(x_1) \varphi_\theta(x_2) \hat{C}_{o_{ww}}(\Delta x, \omega) dx_1 dx_2}{\int_L \varphi_\theta^2(x) dx \cdot \int_L \varphi_\theta^2(x) dx} \quad (4.55)$$

Alle elementene i matrisen for spektraltettheten til turbulenslasten er nå definert og respons-spektraltettheten kan beregnes fra ligning (4.41). For å beregne responsen til en valgt posisjon,  $x_p$ , gitt som forskyvninger og rotasjoner, transformeres systemet fra modale frihetsgrader til fysiske frihetsgrader med relativ frihetsgrad for massedemperen:

$$\mathbf{r}_{rel}(x_p, t) = \begin{bmatrix} r_z(x_p, t) \\ r_\theta(x_p, t) \\ \Delta r_d(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_z(x_p) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_\theta(x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_{x_p}} \begin{bmatrix} \eta_z(t) \\ \eta_\theta(t) \\ \Delta \eta_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Dermed blir respons-spektraltettheten i fysiske frihetsgrader:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{r, x_p}(x_p, \omega) &= \Phi_{x_p} \mathbf{S}_\eta(\omega) \Phi_{x_p}^T \\ &= \Phi_{x_p} \left[ \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \mathbf{S}_{\hat{R}_v}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) \right] \Phi_{x_p}^T \end{aligned} \quad (4.57)$$



Variansen til dynamisk respons kan videre beregnes ved å integrere over hele frekvensområdet:

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}_{r, x_p}(x_p) &= \int_0^{\infty} \mathbf{S}_{r, x_p}(x_p, \omega) d\omega \\ &= \Phi_{x_p} \left[ \int_0^{\infty} \hat{\mathbf{H}}^*(\omega) \mathbf{S}_{\hat{R}_v}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^T(\omega) d\omega \right] \Phi_{x_p}^T\end{aligned}\quad (4.58)$$

der den symmetriske covarians-matrisen inneholder variansen til frihetsgradene på diagonalen og covariansen mellom frihetsgradene utenfor diagonalen.

$$\mathbf{Cov}_{r, x_p} = \begin{bmatrix} \sigma_{r_z r_z}^2 & Cov_{r_\theta r_z} & Cov_{r_d r_z} \\ * & \sigma_{r_\theta r_\theta}^2 & Cov_{r_d r_\theta} \\ * & * & \sigma_{r_d r_d}^2 \end{bmatrix}\quad (4.59)$$

Kvadratrot av variansen,  $\sigma_{r_i r_i}$ , er standardavviket til den dynamiske responsen.

Dette er en statistisk størrelse som ikke er et direkte mål på responsen. Den totale responsen består av statisk respons og dynamisk respons. Maksimal respons for en gitt vindtilstand, kan forutsies ved å bruke formelen:

$$r_{i, maks} = \bar{r}_i + k_p \cdot \sigma_{r_i} \quad \text{hvor } i = z, \theta \quad (4.60)$$

Her er  $k_p$  en topp faktor som tar hensyn til de statistiske egenskapene til responsen (Strømmen 2010).

Denne oppgaven fokuserer kun på den dynamiske responsen. Ved kritiske vindhastigheter blir den statiske responsen relativt liten i forhold til dynamisk respons. Den statiske responsen kan sees på som en utgangsposisjon for de dynamiske svingningene.  $k_p$  er en skaleringsfaktor for den dynamiske responsen og standardavviket beskriver dermed utviklingen av dynamisk respons ved økende middelvindhastighet. I resultatene brukes derfor standardavviket som et mål på dynamisk respons, selv om det ikke direkte beskriver responsverdien.



# 5 Resultater og diskusjon

## 5.1 Broene

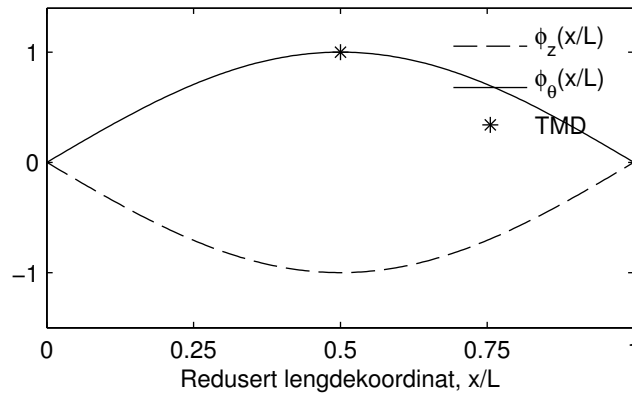
Det er gjort beregninger på effekten av en massedemper installert på to ulike brokonstruksjoner. Den ene er en fiktiv bro fra eksempel 6.3, side 134 i boka, *Theory of Bridge Aerodynamics*, (Strømmen 2010). Broa har et hovedspenn på 500 m og de aerodynamiske egenskapene til broa tar utgangspunkt i de kvasi-statiske aerodynamisk deriverte. Den andre broa er Hardangerbroa, en hengebro med 1310 m langt hovedspenn (Norges lengste). Hardangerbroa er veldig slank (bredde i forhold til lengde) sammenlignet med tidligere konstruerte broer. De aerodynamiske egenskapene var derfor lagt stor vekt på i design og prosjektering av broa og de aerodynamisk deriverte er bestemt ut fra vindtunnelforsøk. Nødvendige konstruksjonsegenskaper er gjengitt i Tabell 5-1 og Tabell 5-2 nedenfor med tilhørende egensvingeformer vist i Figur 5-1 og Figur 5-2.

Tabell 5-1: Konstruksjonsegenskaper for fiktiv bro. (Strømmen 2010)

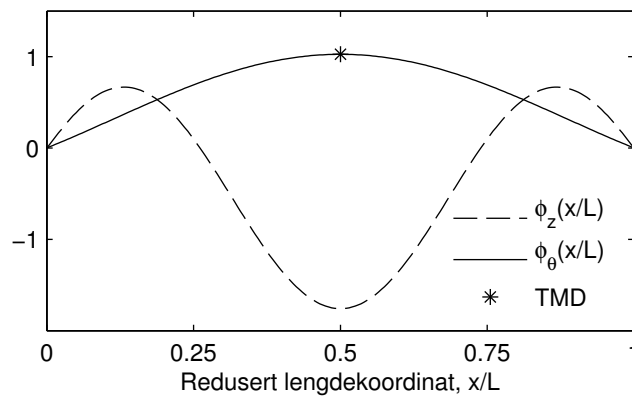
$L$ (m)	$B$ (m)	$m_z$ (kg/m)	$m_\theta$ (kgm <sup>2</sup> /m)	$\omega_z$ (rad/s)	$\omega_\theta$ (rad/s)	$\zeta_z$	$\zeta_\theta$
500	20	$10^4$	$6 \cdot 10^5$	0.8	2.0	0.005	0.005

Tabell 5-2: Konstruksjonsegenskaper for Hardangerbroa. (Strømmen 2008)

$L$ (m)	$B$ (m)	$m_z$ (kg/m)	$m_\theta$ (kgm <sup>2</sup> /m)	$\omega_z$ (rad/s)	$\omega_\theta$ (rad/s)	$\zeta_z$	$\zeta_\theta$
1310	18.3	10900	224160	0.89	2.23	0.005	0.005



Figur 5-1: Egensvingeformer for fiktiv bro. Plassering av massedemper er vist.



Figur 5-2: Egensvingsformer for Hardangerbroa. Plassering av massedemper er vist.

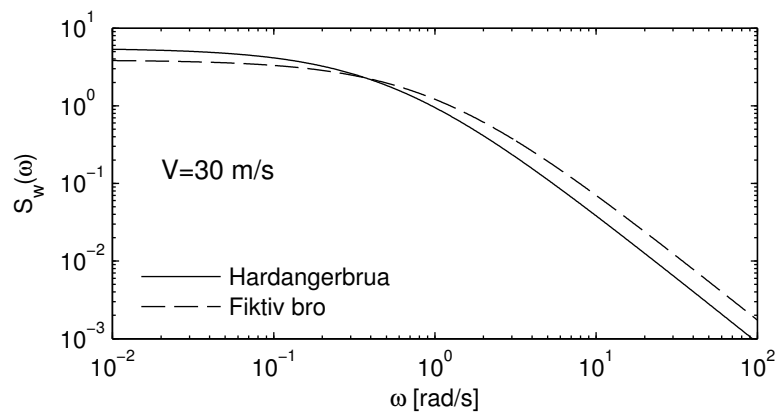
Lastkoeffisienter og parametere for vindturbulens er oppsummert i tabellene nedenfor og turbulensens auto-spektraltetthet er vist i Figur 5-3. Figuren viser at en lengre karakteristisk lengde (Hardangerbroa) gir mer turbulens på de lavere frekvensene. Dette er opplagt fordi en større utbredelse av turbulensen (vindkulene) gir tregere variasjon i den momentane vindhastigheten (lengre tid mellom hvert vindhastighetsmaksimum) og dermed en lengre periode, som er det samme som lavere frekvens. Co-spektrumet er tilnærmet likt for de to broeksemplene som vist i Figur 5-4.

Tabell 5-3: Lastkoeffisienter og turbulensparametre for fiktiv bro. (Strømmen 2010)

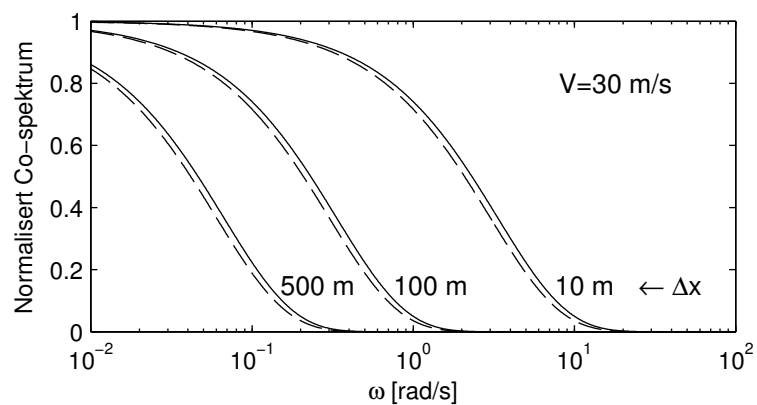
$\rho_{luft}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C'_M$	$C'_L$	$A_w$	$^{x_f}L_w$ (m)	$I_w$	$c_{w,y_f}$
1.25	1.5	5.0	1.5	13.5	0.08	1.0

Tabell 5-4: Lastkoeffisienter og turbulensparametre for Hardangerbroa. (Strømmen 2008)

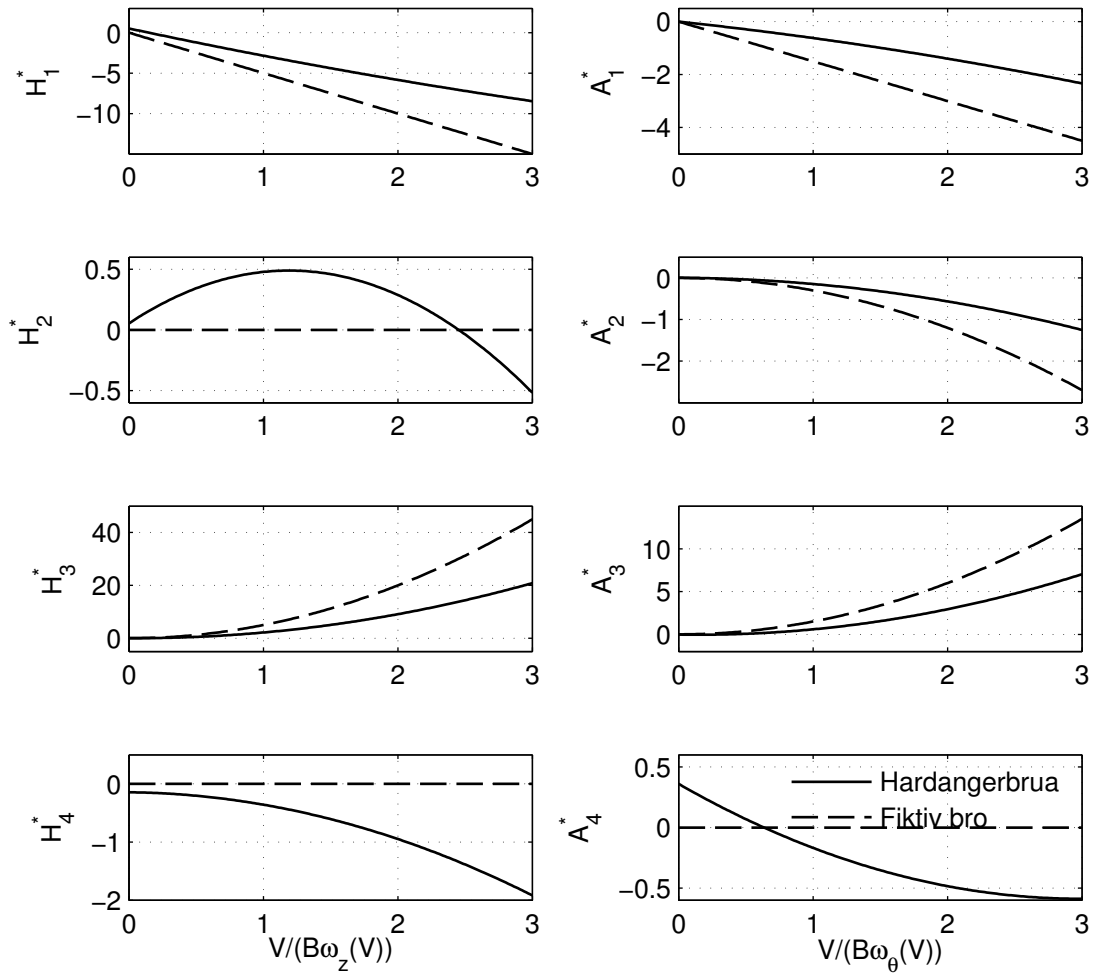
$\rho_{luft}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$C'_M$	$C'_L$	$A_w$	$^{x_f}L_w$ (m)	$I_w$	$c_{w,y_f}$
1.25	0.77	2.4	1.5	25	0.07	0.9



Figur 5-3: Auto-spektralitet for turbulenskomponent  $w$ . Logaritmisk skala på aksene.  $\omega=10^{-2}$  rad/s tilsvarer en periode på 10 min, mens  $\omega=10^0$  rad/s tilsvarer 6.3 s og  $\omega=10^2$  rad/s tilsvarer 0.06 s.



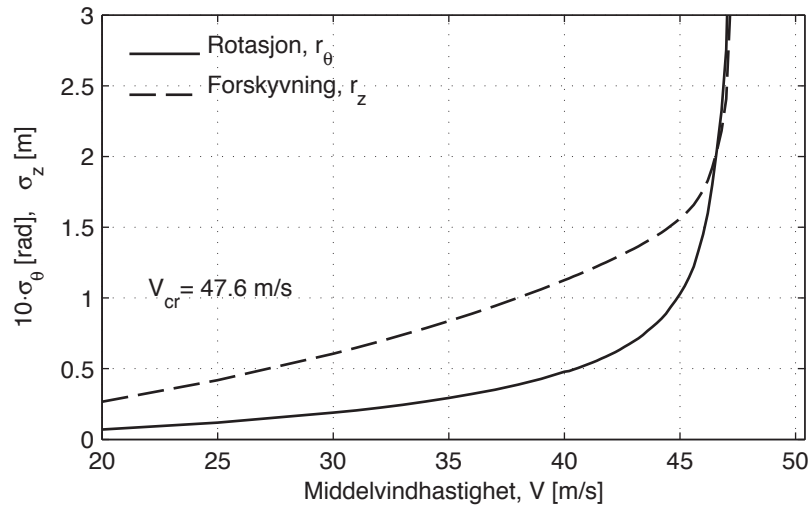
Figur 5-4: Co-spektrum for turbulenskomponent  $w$ . Logaritmisk skala på abscissen.



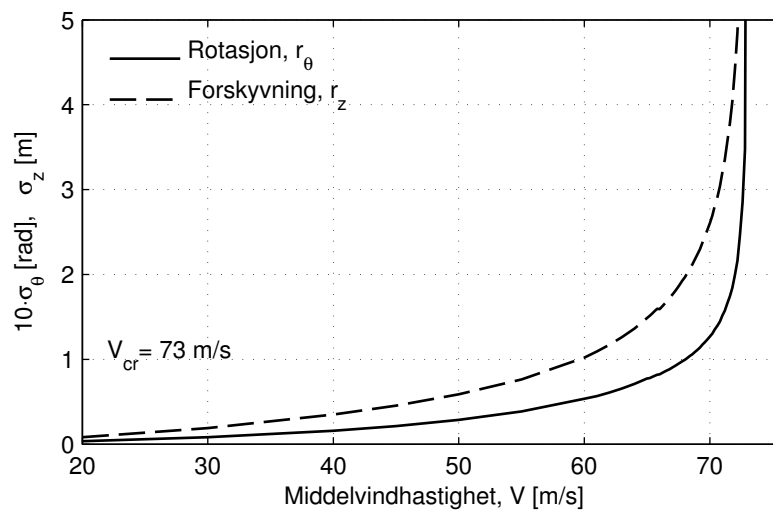
Figur 5-5: Aerodynamisk deriverte for Hardangerbroa og den fiktive broa.

De aerodynamisk deriverte for begge broene er vist i Figur 5-5. For Hardangerbroa er verdiene oppgitt i beregningsrapporten av Strømmen (2008), basert på vindtunnelforsøk av Hansen (2006). For den fiktive broa er de kvasi-statiske verdiene fra buffeting-teorien benyttet bortsett fra verdien for  $A_2^*$ , som gir bevegelsesindusert dempning i torsjon, hvor det er valgt  $A_2^* = -0.2 \cdot C'_M \hat{V}$ . De normaliserte kvasi-statiske aerodynamisk deriverte brukt for den fiktive broa blir dermed:

$$\begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \\ H_4^* \end{bmatrix} = C'_L \begin{bmatrix} -\hat{V} \\ 0 \\ \hat{V}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \\ A_4^* \end{bmatrix} = C'_M \begin{bmatrix} -\hat{V} \\ -0.2 \cdot \hat{V}^2 \\ \hat{V}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad \hat{V} = V/B\omega_i \quad (5.1)$$



Figur 5-6: Standardavvik av dynamisk respons (vertikal forskyvning og rotasjon) for midtpunktet til fiktiv bro.



Figur 5-7: Standardavvik av dynamisk respons (vertikal forskyvning og rotasjon) for midtpunktet til Hardangerbroa.

Den dynamiske responsen til broene kan framstilles i en graf med middelvindhastigheten som variabel langs abscissen. Dette er vist i Figur 5-6 og Figur 5-7 nedenfor. Kritisk vindhastighet leses av abscissen der hvor responsen øker mot uendelig. Det er ikke inkludert massedempere og den dynamiske responsen med kritisk vindhastighet benyttes videre som en referansestørrelse for å se hvor effektiv en massedemper er.

Responsen beregnet for den fiktive broa samsvarer godt med beregningene i boka til Strømmen (2010). For Hardangerbroa er beregnet respons i denne oppgaven betydelig høyere enn beregningene fra prosjekteringsrapporten (Strømmen 2008). Den kritiske vindhastigheten samsvarer likevel godt og det antas derfor at uoverensstemmelsen for responsen ikke påvirker effektiviteten til en massedemper. Regneprogrammet ble utviklet med beregninger etter eksempelet til Strømmen (2010). Det var dermed en overraskelse at responsen ikke stemte bedre for Hardangerbroa. På grunn av tidsplanen til prosjektet ble det ikke prioritert å finne eventuelle feil i regneprogrammet. Det var heller ikke nødvendig for å vise effekten av en massedemper.

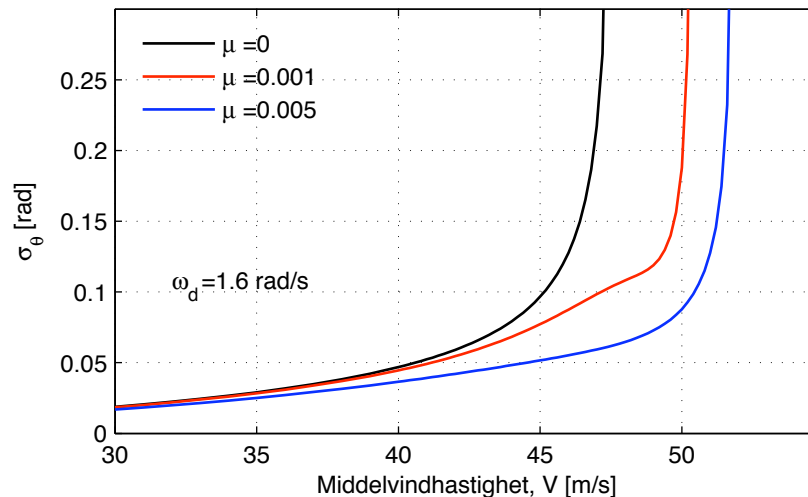
## 5.2 Massedemperens effekt på aerodynamisk stabilitet

Ved å innføre en massedemper i beregningen vil den ustabile responsen opptre ved en høyere middelvindhastighet. Dette er vist for fiktiv bro i Figur 5-8 og for Hardangerbroa i Figur 5-12. Den svarte linjen viser responsen uten massedemper, mens de fargede viser responsen for forskjellige størrelser på massedemperen.  $\mu$ -verdien tilsvarende forholdet mellom massen til massedemperen og den modale massen til rotasjonsfrihetsgraden,  $\mu = M_d / \tilde{M}_\theta$ , hvor  $\tilde{M}_\theta = \int_L \phi_\theta^2(x) m_\theta(x) dx$ . For begge eksempelbroene vil modal masse være tilnærmet lik,  $\tilde{M}_\theta \approx 150 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Dempingsparameteren til massedemperen,  $\zeta_d$ , er valgt etter optimaliseringsformelen etter Den Hartog (1956):

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu/8}{(1+\mu)^3}} \quad (5.2)$$

Det er grunn til å anta at dempningsparameteren ikke påvirker massedemperens innvirkning på kritisk vindhastighet i stor grad. Det er derfor valgt å ikke inkludere denne i påfølgende parametervariasjon. Egenfrekvensen til massedemperen,  $\omega_d$ , er valgt til 1.6 rad/s. Det tilsvarende responsfrekvensen som broa har ved stabilitetsgrensen. For å bestemme optimal masse og egenfrekvens til massedemperen er det utført et parameterstudie hvor masse og egenfrekvens er variert. Først presenteres noen egenskaper ved massedemperens virkning på kritisk vindhastighet ved å ta utgangspunkt i den fiktive broa med massedemper.

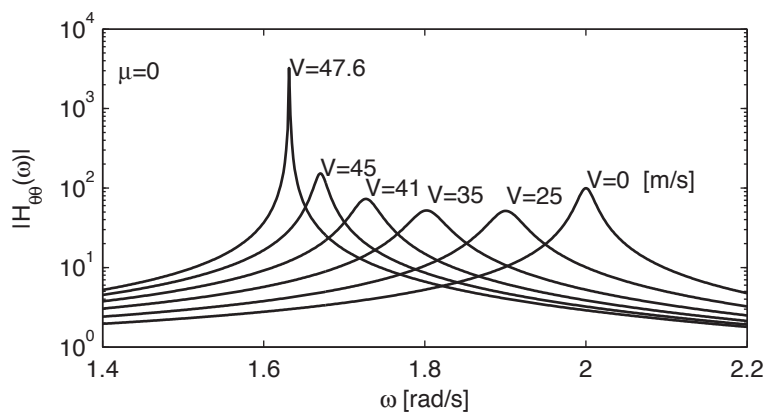




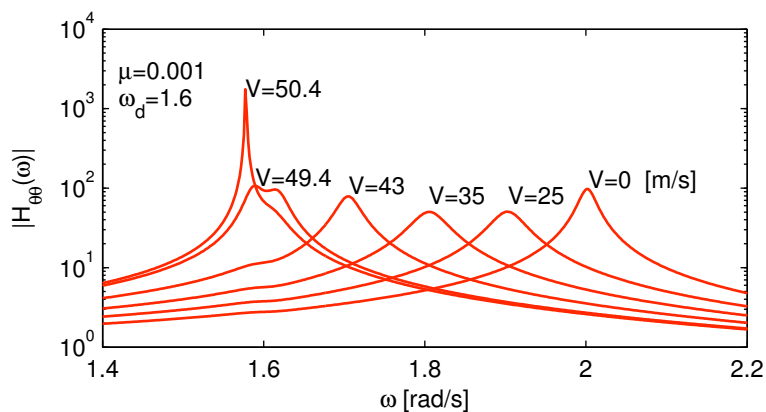
Figur 5-8: Standardavvik av dynamisk respons (rotasjon) for midtpunkt på fiktiv bro med massedemper.

Det er tydelig at en massedemper har stor innvirkning på den kritiske vindhastigheten, og en større massedemper vil ha større effekt enn en mindre massedemper. Figur 5-8 viser at en økning av den kritiske vindhastigheten på ca. 10 % er mulig når  $\mu=0.005$ . Den røde linjen ( $\mu=0.001$ ) har en annerledes form enn de to andre. Dette kommer av at massedemperen bare er effektiv i et smalt frekvensområde. Virkningen til massedemperen er størst når responsfrekvensen er nær egenfrekvensen til massedemperen. Det skjer når middelvindhastigheten er rundt 49 m/s, tett opp til kritisk vindhastighet som er 50.4 m/s. Ved lavere middelvindhastigheter, rundt 45 m/s, (høyere responsfrekvens) er ikke virkningen til massedemperen like stor. Dette sees ved at responsen øker mer (høyere stigning). Denne effekten kommer av at egenfrekvensene til systemet endrer seg med middelvindhastigheten. Massedemperens egenfrekvens må dermed treffe systemets egenfrekvens ved en optimal middelvindhastighet.

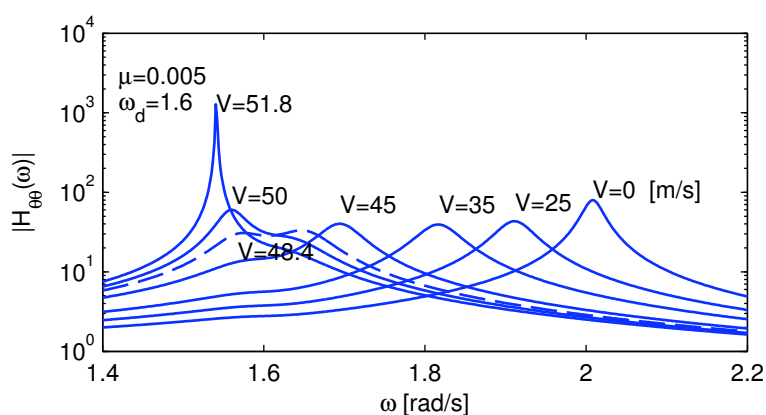
Figur 5-9, Figur 5-10 og Figur 5-11 viser hvordan frekvens-respons-funksjonen utvikler seg ved økende middelvindhastighet. Det er tydelig at massedemperen innfører dempning i systemet (toppene blir lavere) og den kritiske vindhastigheten skyves oppover. Dempningen er begrenset til frekvensene rundt egenfrekvensen til massedemperen, 1.6 rad/s. For den større massedemperen ( $\mu=0.005$ ) blir toppene ytterligere dempet ned og demperen er virksom i et bredere frekvensområde. Dette er synlig i figuren hvor dempningen også er tydelig ved 35 m/s og 25 m/s.



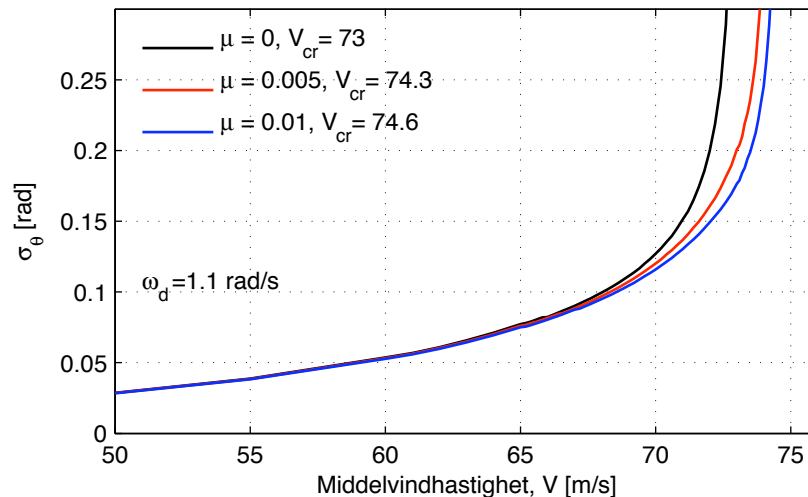
Figur 5-9: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgraden. Fiktiv bro uten massedemper.  $V_{cr}=47.6$  m/s.



Figur 5-10: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgrad. Fiktiv bro med massedemper. Dempningen er tydelig ved  $V=49.4$  m/s.  $V_{cr}=50.4$  m/s.



Figur 5-11: Frekvens-respons-funksjon for rotasjonsfrihetsgrad. Fiktiv bro med større massedemper. Maksimal dempning ved  $V=48.4$  m/s (stiplet linje).  $V_{cr}=51.8$  m/s.



Figur 5-12: Standardavviket av dynamisk respons (rotasjon) for midtpunkt av Hardangerbroa med en massedemper.

En massedemper montert på Hardangerbroa gir en mye mindre effekt på responsen og den kritiske vindhastigheten, sammenlignet med den fiktive broa. Figur 5-12 viser at en massedemper med  $\mu=0.010$  (det dobbelte av massedemperen brukt på den fiktive broa) gir en økning av kritisk vindhastighet på ca. 1.5 m/s. Det tilsvarer 2% økning av kritisk vindhastighet. Det er ikke fastlagt hvorfor det er så stor forskjell på massedemperens virkningen for de to broeksemplene. Generelt kan det sies at brotverrsnittet til Hardangerbroa er designet for å gi en mest mulig gunstig responsutvikling ved økende middelvindhastigheter. Den fiktive broa, hvor de aerodynamiske egenskapene er bestemt ut fra de kvasi-statiske aerodynamisk deriverte, har til sammenligning et ugunstig tverrsnitt. Ved å benytte de kvasi-statiske aerodynamisk deriverte på Hardangerbroa, er det undersøkt om de aerodynamiske kreftene påvirker massedemperens effekt. Relativ økningen av kritisk vindhastighet var tilsvarende som for de virkelige aerodynamisk deriverte. De aerodynamiske egenskapene til tverrsnittet kan derfor utelukkes som forklaring på forskjellen.

Resultatene over viser at det er flere faktorer som påvirker hvor effektivt en massedemper kan øke kritisk vindhastighet. I tillegg til størrelsen på massedemperen vil også egenfrekvensen til massedemperen ha stor innvirkning. Velges egenfrekvensen for høy, vil ikke massedemperen lenger ha noen effekt når middelvindhastigheten økes til kritisk vindhastighet. Velges den for lav, vil ikke massedemperen ha noen effekt før kritisk vindhastighet inntreffer, og dermed ikke ha noen effekt i det hele tatt.

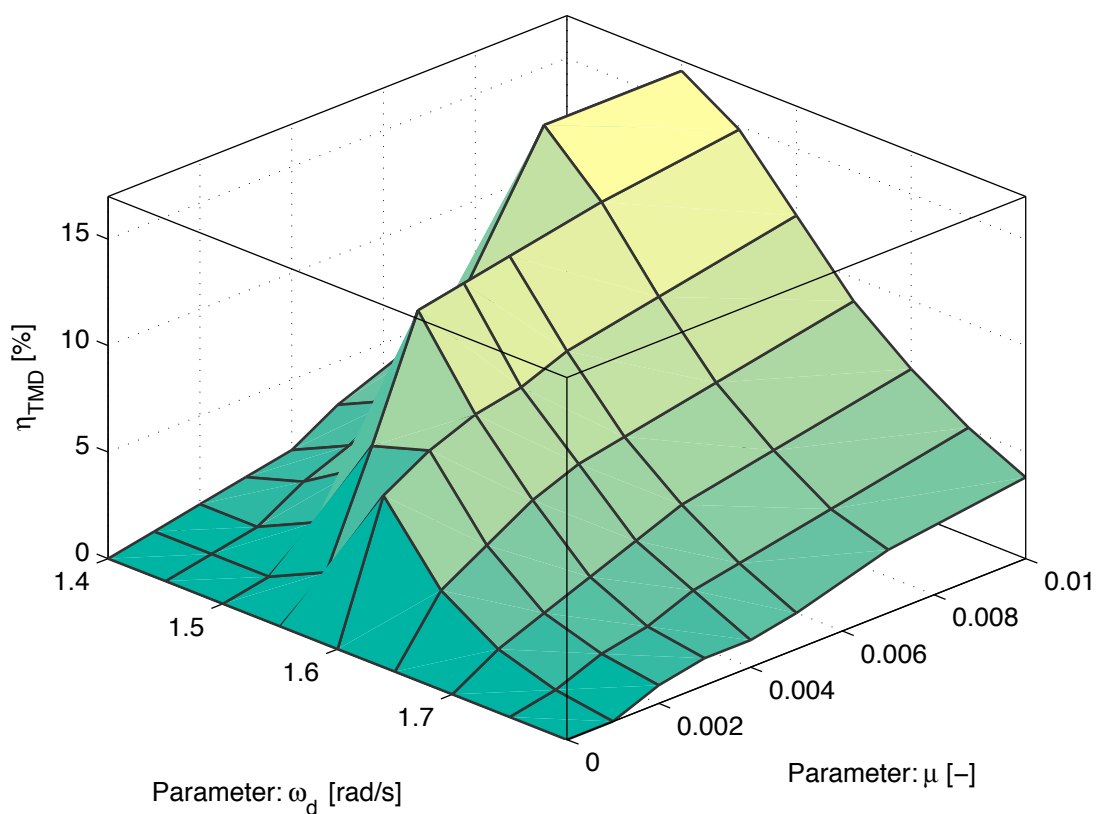
Ved å variere størrelsene for  $\mu$  og  $\omega_d$  i en parameterstudie, vil det være mulig å se hvilke verdier som gir størst effekt. Effekten måles ved å se hvor mange prosent den kritiske vindhastigheten øker når en massedemper innføres. Prosenttallet er gitt ved:

$$\eta_{TMD} = \frac{|V_{cr}^{\mu=0} - V_{cr}^{TMD}|}{V_{cr}^{\mu=0}} \cdot 100 \quad (5.3)$$

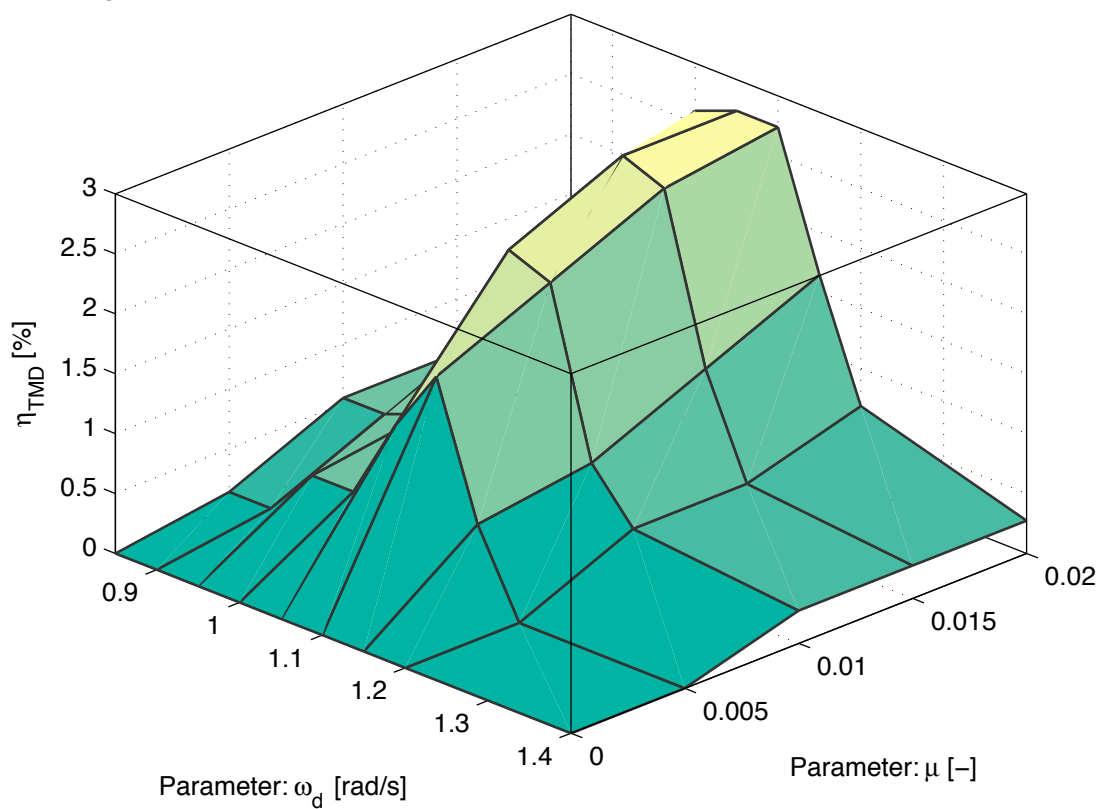
hvor  $V_{cr}^{TMD}$  og  $V_{cr}^{\mu=0}$  er henholdsvis kritisk vindhastighet for broa med massedemper og uten massedemper.

Ved å beregne prosentvis økning av kritisk vindhastighet,  $\eta_{TMD}$ , for forskjellige verdier av  $\mu$  og  $\omega_d$ , kan en 3-dimensjonal graf som vist i Figur 5-13 og Figur 5-14 benyttes for å finne den optimale kombinasjonen av parameterne. Figurene viser at det er mulig å øke kritisk vindhastighet med opptil 16.5% for den fiktive broa og 2.74% for Hardangerbroa. Den prosentvis økningen av kritisk vindhastighet er større ved økende tyngde på massedemperen. Samtidig er denne tendensen avtagende ved økende  $\mu$ -verdier, og ved en viss tyngde gir det ikke effekt å øke  $\mu$  mer.

For den fiktive broa er det tydelig at økende tyngde på massedemperen gir en optimal egenfrekvens som er lavere. Dette er i mindre grad tydelig for Hardangerbroa. Denne sammenhengen kommer av at responsfrekvensen endres ved økende middelvindhastighet, og at massedemperens evne til å øke kritisk hastighet først og fremst er avhengig av at egenfrekvensen til massedemperen er meget nær responsfrekvensen ved tilhørende kritisk vindhastighet (for konstruksjonen med massedemperen). Samtidig må massedemperen kunne gi tilstrekkelig dempning over frekvensene opp til responsfrekvensen ved tidligere kritisk vindhastighet (for konstruksjonen uten massedemperen). En tyngre massedemper vil ha dempningseffekt over et større frekvensområde og dermed kunne gi den tilstrekkelige dempningen over et tilsvarende større frekvensområde. For Hardangerbroa økes ikke kritisk vindhastighet like mye og responsfrekvensen endres dermed ikke like mye som for den fiktive broa. Derfor er ikke sammenhengen mellom økende  $\mu$ -verdier og minkende optimale  $\omega_d$ -verdier like tydelig.



Figur 5-13: Massedemperens prosentvis økning av kritisk vindhastighet ved parametervariasjon av  $\omega_d$  og  $\mu$  for fiktiv bro.  $\mu$  er 0, 0.001, 0.002 0.003, 0.004, 0.005, 0.007 og 0.01.



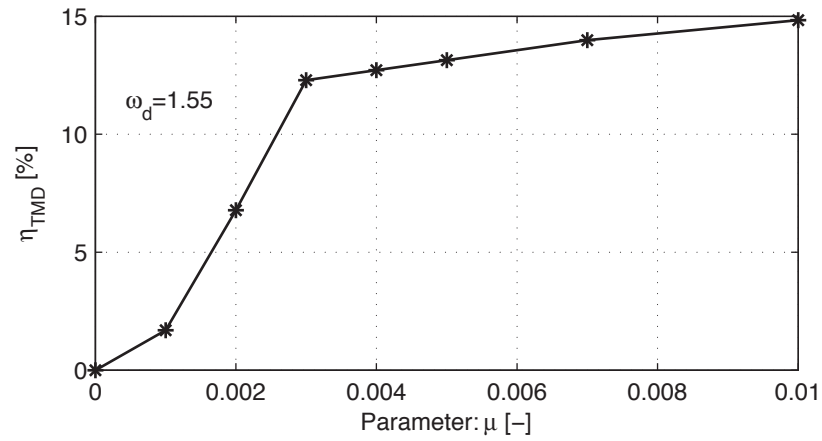
Figur 5-14: Massedemperens prosentvis økning av kritisk vindhastighet ved parametervariasjon av  $\omega_d$  og  $\mu$  for Hardangerbroa.

Tyngden til massedemperen vil være begrenset av de fysiske størrelsene til brobanen og massedemperens konstruksjonsmåte. Et overslag viser at maksimal tyngde vil være mellom  $\mu=0.005$  og  $\mu=0.01$ . Massedemperne som gir høyest prosentvis økning av kritisk vindhastighet i Figur 5-13 og Figur 5-14 er derfor for store. Ved å se nærmere på massedemperen på den fiktive broa med egenfrekvens 1.55 rad/s og massedemperen på Hardangerbroa med egenfrekvens 1.10 rad/s kan det bestemmes hvor tunge massedemperne trenger å være for å øke kritisk vindhastighet optimalt. Dette er vist i Figur 5-15 for fiktiv bro og Figur 5-16 for Hardangerbroa.

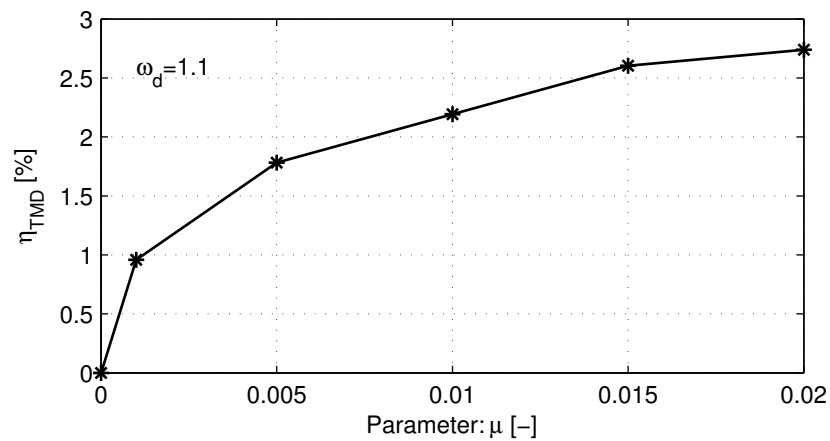
For den fiktive broa vil en optimal tyngde på massedemperen være  $\mu=0.003$ , mens for Hardangerbroa vil optimal tyngde være gitt ved  $\mu=0.005$ . Det er tydelig at prosentvis økning av kritisk vindhastighet flater ut ved økende tyngde på massedemperen. For den fiktive broa er det et tydelig knekkpunkt ved  $\mu=0.003$ , og det gir derfor liten effekt å øke massen til massedemperen ytterligere. For Hardangerbroa er det ikke like tydelig utflating, men ved  $\mu$ -verdier rundt 0.005, har ytterligere økning av massen mindre effekt. De valgte optimale parameterne til massedemperne med resultater er oppsummert i Tabell 5-5.

*Tabell 5-5: Oppsummering av optimale parametere for massedemperens påvirkning på kritisk middelvindhastighet.*

	$\mu$ [-]	$\omega_d$ [rad/s]	$V_{cr}^{\mu=0}$ [m/s]	$V_{cr}^{TMD}$ [m/s]	$\Delta V_{cr}$ [m/s]	$\eta_{TMD}$ [%]
Fiktiv bro	0.003	1.55	47.6	52.8	5.2	10.9
Hardangerbroa	0.005	1.10	73.0	74.3	1.3	1.8



Figur 5-15: Effektiviteten av massedemper på fiktiv bro med egenfrekvens,  $\omega_d=1.55$  rad/s, for ulike verdier av  $\mu$ . Knekkpunktet er ved  $\mu=0.003$ .



Figur 5-16: Effektiviteten av massedemper på Hardangerbroa med egenfrekvens,  $\omega_d=1.1$  rad/s, for ulike verdier av  $\mu$ . Effekten av en tyngre massedemper avtar etter  $\mu=0.005$ .

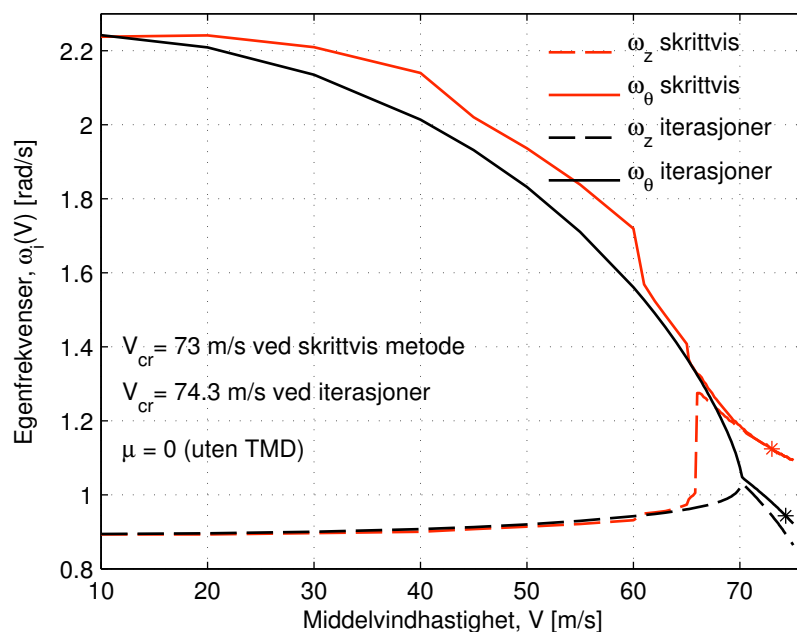
### 5.3 Egenfrekvensens sensitivitet

For begge broeksemplene er det tydelig at en liten endring i egenfrekvensen ( $\pm 0.05$  rad/s) gir en stor reduksjon i effektiviteten til massedemperen (se Figur 5-15 og Figur 5-16). Spesielt er dette tydelig for de lavere verdiene av  $\mu$  og i større grad for Hardangerbroa enn den fiktive broa. Det er derfor viktig at egenfrekvensen til massedemperen treffer den optimale verdien. Ønsket egenfrekvens kan oppnås ved å finjustere stivhet og masse etter at massedemperen er installert. Det er derimot vanskeligere å forutsi responsfrekvensen til konstruksjonen ved kritisk hastighet.

Interaksjonen mellom vindfeltet og konstruksjonen og styrken på de bevegelsesinduserte kreftene, bestemmer hvordan egenfrekvensene endrer seg ved økende middelvindhastighet. Det er de aerodynamisk deriverte som beskriver de bevegelsesinduserte kreftene og således endringen til egenfrekvensene. De finnes ved å teste en modell av tverrsnittet i vindtunnel. Modellforsøk gir alltid en viss usikkerhet, både i målt verdi og statistisk spredning i resultatet. Vindhastigheten kan ikke økes helt til kritisk hastighet fordi svingningene til modellen da vil bli for store. Derfor må dataene ekstrapoleres opp til kritisk vindhastighet. Nøyaktigheten til de aerodynamisk deriverte, spesielt ved vindhastigheter som tilsvarer kritisk vindhastighet, kan derfor være utilfredsstillende.

I beregningen av dynamisk respons må det utføres iterasjoner for å bestemme de bevegelsesinduserte lastene fra de aerodynamisk deriverte. Det er også mulig å beregne dynamisk respons uten iterasjoner ved å øke middelvindhastigheten skrittvis og benytte egenfrekvensene (i vindfeltet) fra forrige hastighetsskritt. Egenfrekvensene defineres da ved frekvensen som gir den høyeste verdien i frekvens-respons-funksjonen. Resultatene presentert tidligere i kapittelet er beregnet med en slik skrittvis metode. Tilsvarende beregninger med iterasjoner viser at responsfrekvensen ved kritisk vindhastighet er lavere. Dette er vist for beregninger av Hardangerbroa i Figur 5-17. Ved små skrittvis økninger av middelvindhastigheten blir utviklingen av egenfrekvensene for de to metodene stort sett lik hverandre. Den viktigste forskjellen vises ved måten vertikal egensvingeform faller sammen med rotasjons-egensvingeformen. Ved iterasjonsmetoden nærmer egenfrekvensene og egensvingeformene seg hverandre gradvis, mens for den skrittvis beregningsmetoden faller egenfrekvensene sammen ved en gitt middelvindhastighet. Den plutselige økningen til vertikal egenfrekvens kommer av koblingen mellom modene på





Figur 5-17: Egenfrekvensenes endring ved økende middelvindhastighet på grunn av bevegelsesinduserte krefter. Egenfrekvensene er beregnet med iterasjoner (svart) og skrittvis metode (rød). Tilhørende kritisk vindhastighet er markert med stjerne (\*).

grunn av de bevegelsesinduserte lastene. Rotasjon av tverrsnittet gir store vertikale laster som endrer den vertikale responsen til brobanen. Ved hastigheten som gir sammenfallende egenfrekvenser, er toppen i frekvens-respons-funksjonen høyere ved frekvensen for de koblede lastene enn ved frekvensen gitt av egenfrekvensen til vertikal egensvingeform.

Hvordan broa oppfører seg i full skala i et virkelig vindfelt (virkeligheten) og hvilken responsfrekvens som oppstår ved kritisk vindhastighet er vanskelig å forutsi uten modellforsøk av hele brokonstruksjonen for tilsvarende vindhastigheter med kollaps av modellen som resultat. For å unngå omfattende modellforsøk er det derfor ønskelig at en massedemper er mer robust mot variasjoner i responsfrekvensen. Det må nevnes at teorien bak beregningen av dynamisk respons forutsetter lineære krefter og små forskyvninger. Det er stor grunn til å tro at de ikke-lineære kreftene kan være betydelige ved middelvindhastigheter opp mot kritisk vindhastighet. Dette skaper et ytterligere usikkerhetsmoment omkring verdien til responsfrekvensen ved kritisk vindhastighet.

For å øke massedemperens robusthet mot endring av responsfrekvensen ved kritisk vindhastighet må massedemperen være virksom over et større frekvensområde. Som nevnt tidligere kan dette gjøres ved å øke massen til

massedemperen, men det kan være vanskelig på grunn av fysiske og konstruktive begrensninger. Kwon og Park (2004) viser i sitt arbeide at flere mindre massedempere er fordelaktig i forhold til en stor massedemper. De ulike massedemperne kan optimaliseres til ulike responsfrekvenser og slik dekke et mye bredere frekvensområde. Resultatene fra Kwon og Park (2004) viser at flere massedempere med ulike egenfrekvenser gir en stor økning av kritisk vindhastighet i forhold til en enkel massedemper, selv ved innføring av usikkerhet på de aerodynamisk deriverte på  $\pm 15\%$ .

Det er også andre fordeler med flere mindre massedempere i forhold til en stor massedemper. Begrensningene, med hensyn til plass inne i brotverrsnittet, blir mindre fordi massedemperne kan fordeles over en lengre del av brobanen i forskjellige tverrsnittsseksjoner (skott). Konstruktive utfordringer som opplagring av massedempere og kapasitet for punktlaster blir også enklere. Dette gjør at den totale massen til flere mindre massedempere kan tillates å være større enn massen til en stor massedemper.

# 6 Konklusjon og videre arbeid

## 6.1 Konklusjon

I oppgaven er det beregnet hvordan en massedemper som demper rotasjonssvingninger kan bidra til å øke stabilitetsgrensen (kritisk vindhastighet) for hengebroer. De to eksempelbroene, en fiktiv bro fra et beregningseksempel av Strømmen (2010) og Hardangerbroa, viser at en massedemper har positiv effekt på kritisk vindhastighet, men i ulik grad.

For den fiktive broa vil en massedemper ha meget stor effekt på kritisk vindhastighet. Den kritiske vindhastigheten til broa uten massedemper er 47.2 m/s. En massedemper med masse lik 0.3 % av modal masse vil øke den kritiske vindhastigheten med 5.2 m/s, som tilsvarer 10.9 % økning. For Hardangerbroa, som uten massedemper har en kritisk vindhastighet lik 73 m/s, vil en massedemper med masse lik 0.5 % av modal masse øke kritisk vindhastighet med 1.3 m/s. Dette tilsvarer 1.8 % økning og er en liten effekt på stabilitetsgrensen i forhold til den fiktive broa.

Variasjon av parameterne  $\mu$  (masseforhold) og  $\omega_d$  (massedemperens egenfrekvens) i beregningen, viser at optimal verdi for  $\omega_d$  er avhengig av  $\mu$ . Videre kan det vises at økningen av kritisk vindhastighet flater ut ved økende masse. Derfor vil ikke en størst mulig  $\mu$ -verdi være optimalt. Det kan også være problematisk å konstruere en massedemper med høyt masseforhold på grunn av fysiske og konstruktive begrensninger. De optimale parameterverdiene må derfor velges ut fra hvor stor masse som kan tillates og hvor stor masse som er nødvendig for å gi ønsket økning av kritisk vindhastighet. Egenfrekvensen til massedemperen må optimaliseres til det valgte masseforholdet.

Massedemperens evne til å øke kritisk vindhastighet er avhengig av at egenfrekvensen,  $\omega_d$ , treffer optimalt i forhold til responsfrekvensen ved kritisk

vindhastighet. Resultatene viser at et lite avvik fra optimal verdi ( $\pm 0.5$  rad/s) gir en stor reduksjon i effektiviteten til massedemperen. Dette gjør massedemperen sårbar overfor unøyaktighet og usikkerhet i beregningen av responsfrekvensen ved kritisk vindhastighet. For at massedemperen skal være mer robust mot usikkerhet må derfor dempningseffekten strekke seg over et større frekvensområde. Det kan oppnås ved å benytte flere mindre massedempere med forskjellig egenfrekvenser slik at de tilsammen dekker et bredere frekvensområde.

## **6.2 Forslag til videre arbeid**

Det er betydelig forskjell på massedemperens evne til å øke stabilitetsgrensen for den fiktive broa og Hardangerbroa. I denne oppgaven er det observert at de aerodynamiske lastene ikke er avgjørende for massedemperens effekt, men de bakenforliggende årsakene til forskjellen er ikke diskutert eller undersøkt. Det vil være nyttig å analysere flere brokonstruksjoner for å kunne se sammenhengene mellom forskjellige strukturelle egenskaper og virkningen av massedemperen. Eventuelt kan utvalgte strukturelle egenskapene inkluderes i en parameterstudie for avdekke hvilke egenskaper som er av betydning.

Dette er en teoretisk studie og det gjenstår å etterprøve gyldigheten av teorien. Aerodynamisk ustabilitet er en ekstrem lastsituasjon og det er – naturlig nok – vanskelig å gjøre fullskala målinger under slike forhold. Forsøk med en skalert modell i vindtunnel gir muligheter til å kontrollere målte responsverdier mot responsverdier fra beregningsmodellen.

# 7 Referanser

- Astiz, M. A. (1998). *Flutter Stability of Very Long Suspension Bridges*. Journal of Bridge Engineering, 3 (3): 132-139.
- Bell, K. (2011). *Matrisestatikk, Statistiske beregninger av rammekonstruksjoner*. Trondheim: Tapir Akademisk forlag. 515 s.
- Billah, K. Y. & Scanlan, R. H. (1991). *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks*. American Journal of Physics, 59 (2).
- Chopra, A. K. (2007). *Dynamics of structures : theory and applications to earthquake engineering*. 3. utg. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall. 876 s.
- Connor, J. J. (2003). *Introduction to structural motion control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall. 680 s.
- Dallard, P., Fitzpatrick, A., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill Smith, R. & Willford, M. (2001). *The London millennium footbridge*. Structural Engineer, 79 (22): 17-21.
- Den Hartog, J. P. (1956). *Mechanical vibrations*. 4. utg. New York: McGraw-Hill.
- Dyrbye, C. & Hansen, S. O. (1997). *Wind loads on structures*. Chichester: Wiley. 229 s.
- Hansen, S. O. & et. al. (2006). *The Hardanger Bridge; Static and dynamic wind tunnel tests with a section model*, Rev. 1.
- Irgens, F. (2006). *Fasthetslære*. 7 utg. Trondheim: Tapir Akademisk forlag.
- Kwon, S.-D. & Park, K.-S. (2004). *Suppression of bridge flutter using tuned mass dampers based on robust performance design*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 92 (11): 919-934.
- Miyata, T. (2003). *Historical view of long-span bridge aerodynamics*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 91 (12): 1393-1410.
- Scanlan, R. H. (1990). *Bridge aeroelasticity: Present state and future challenges*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 36, Part 1: 63-74.
- Statens vegvesen. (2013a). *Teknisk brosjyre Hardangerbrua*. Tilgjengelig fra: <http://www.vegvesen.no/Vegprosjekter/Hardangerbrua> (lest 06.06.2013).
- Statens vegvesen. (2013b). *Vegprosjekter-Ferjefri E39: Statens vegvesen*. Tilgjengelig fra: <http://www.vegvesen.no/Vegprosjekter/ferjefriE39> (lest 05.06.2013).
- Strømmen, E. (2010). *Theory of Bridge Aerodynamics*. Berlin, Germany: Springer. 302 s.
- Strømmen, E. (2013). *Structural Dynamics*. Berlin, Germany: Springer.
- Strømmen, E. N. (2008). *Multi-Mode Beregning av Vindindusert Dynamisk Respons for Hardangerbroen*, Rev. A. Trondheim: NTNU, Institutt for konstruksjonsteknikk. 50 s.
- Åkesson, B. (2008). *Understanding bridge collapses*. London: Taylor & Francis. 266 s.



## 8 Vedlegg

- A Hovedskript Matlab**
- B Matlabfunksjon AD\_funk.m**
- C Matlabfunksjon jaf\_funk.m**
- D Matlabfunksjon phi\_funk.m**





## Vedlegg A: Hovedskript Matlab

```
%% Hovedskript: Dynamisk respons
% Beregnier dynamisk respons for valgte vindhastigheter. Tar hensyn til
% turbulens og bevegelsesinduserte krefter.

% Følgene matlabfunksjoner benyttes:
% phi_funk.m, AD_funk.m, jaf_funk.m

% Følgende datafiler benyttes:
% BasisDat.txt, VindDat.txt, PpAD.txt (aerodynamisk deriverte),
% AA.txt (egensvingeformer)

clf
clear all
close all

% Navn til outputfiler
Prefix=['Run4']; % Navn på datafil
Beskrivelse=['Hardangerbroa']; % Evt beskrivelse av datafil

% Velg ADer-, iterasjons- og lagringsvalg
ADflag=2; % 0: AD=0 1: Quasi Static 2: From file PpAD.txt
ittflag=0; % 0: ingen itterasjoner 1: Itterasjoner etter maxitt
lagreFlag=0; % 0: Lagrer ikke H-matrise 1: Lagrer H-matrise til egen fil
% NB: Mye minne nødvendig

% Velg egenfrekvens og masse for TMD, for parameterstudie
omegaDVektor=[1.4 1.2 1.15 1.1 1.05 1.0 0.95 0.9 0.85];
myVektor=[ 0 1 5 10 15 20 ]*10^-3; %Masse i forhold til modalmasse,
MT_mod

%% Sette parametre og tverrsnittsdata

% Bestem lengden til variable:
Nx=101; %x-variabel til brubane. Må være oddetall
Nomega=2000; %omegavariabel for frekvensanalyse

% Andre innputdata:
Vmax=80; Nv=8; %Middelvindhastighet
errlim=10^-4; maxitt=6; %Stoppkriterium for iterasjoner

% Leser data fra fil
load -ascii BasisDat.txt
B=BasisDat(1,1);
L=BasisDat(1,2); rho=BasisDat(1,3);
%Vmin=BasisDat(2,1); Vmax=BasisDat(2,2); Nv=BasisDat(2,3);
mZ=BasisDat(3,1); omegaZ=BasisDat(3,2); zetaZ=BasisDat(3,3);
mT=BasisDat(4,1); omegaT=BasisDat(4,2); zetaT=BasisDat(4,3);
clear BasisDat

% Leser vinddata fra fil
load -ascii VindDat.txt
Cl=VindDat(1,1); Cm=VindDat(1,2);
xLw=VindDat(2,1); Aw=VindDat(2,2); Cw=VindDat(3,1); Iw=VindDat(3,2);
clear VindDat
```

```

% Middelvind vektorer
Vplot=10:10:Vmax;      %For plot av H-matrise

%Alt1:
% Vm=0:Vmax/Nv:Vmax;
%Alt2:
Vm1=0:10:40;
Vm2=45:5:60;
Vm3=61:1:65;
Vm4=65.2:0.2:72.8;
Vm5=73:0.1:75;
Vm=[Vm1 Vm2 Vm3 Vm4 Vm5];
Nv=length(Vm)-1;

%% Konstruksjonsegenskaper _____
x_redD=0.5;                %Plassering av massedemper
[phiZ, phiT,x_red]=phi_funk(1,2,Nx);
iD=find(x_red == x_redD);
phiXd=phiT(iD);
figure(4)
plot(x_red,phiZ, x_red,phiT, x_redD,phiXd,'*')
legend('\phi_z(x/L)', '\phi_\theta(x/L)', 'TMD', 'Location', 'SouthEast')

% Valgt posisjon for responsberegning
x_redP=0.5;
iP=find(x_red == x_redP);

% Modal Stivhetsmatrise for materiale og modal masse
phiZ_Sq=phiZ.^2;
phiT_Sq=phiT.^2;
phiZT=phiZ.*phiT;
IntPhiZ_Sq=L*trapz(x_red, phiZ_Sq);
IntPhiT_Sq=L*trapz(x_red, phiT_Sq);
IntPhiZT=L*trapz(x_red, phiZT);
IntPhi=[IntPhiZ_Sq IntPhiZT IntPhiT_Sq];
MZ_mod=mZ*IntPhiZ_Sq;
KZ_mod=omegaZ^2*MZ_mod;
MT_mod=mT*IntPhiT_Sq;
KT_mod=omegaT^2*MT_mod;

NomegaD=length(omegaDVektor);
Nmy=length(myVektor);

%Pre allocering
Std_my=zeros(3,Nv+1,Nmy);
H_V_my=zeros(3,3,Nomega,Nv+1,Nmy);
omega_V_my=zeros(2,Nv+1,Nmy);
Cov_my=zeros(3,3,Nv+1,Nmy);

Std_my_w=zeros(3,Nv+1,Nmy,NomegaD);
H_V_my_w=zeros(3,3,Nomega,Nv+1,Nmy,NomegaD);
omega_V_my_w=zeros(2,Nv+1,Nmy,NomegaD);
Cov_my_w=zeros(3,3,Nv+1,Nmy,NomegaD);

```

## Vedlegg A: Hovedskript Matlab

```
%%  
Beregningsløkker

---

  
i_w=0;  
for omegaD=omegaDVektor %Løkke for parametervariasjon omega_d  
i_w=i_w+1;  
disp(['omegaD nr ' num2str(i_w) ' av ' num2str(NomegaD)])  
  
i_my=0;  
for my=myVektor %Løkke for parametervariasjon my  
i_my=i_my+1;  
  
% TMD egenskaper  
zetaD=sqrt(3*my/(8*(1+my)^3)); %Fra Den Hartog  
  
MD=my*mT*IntPhiT_Sq;  
KD=omegaD^2*MD;  
  
M_MOD=diag([MZ_mod MT_mod MD]); %Modal massematrise  
K_MOD=diag([KZ_mod KT_mod KD]); %Modal stivhetsmatrise  
ZETA=diag([zetaZ zetaT zetaD]);  
  
MY=[0 0 0; 0 my*phiXd^2 my*phiXd; 0 phiXd 0];  
PHIrelXP=[phiZ(iP) 0 0 ; 0 phiT(iP) 0 ; 0 0 1];  
  
Nmod=length(M_MOD);  
  
%% Pre-allocering

---

  
Sr=zeros(Nmod,Nmod,Nomega);  
Sw=zeros(Nv+1,Nomega);  
Cov=zeros(Nmod,Nmod,Nv+1);  
Std=zeros(Nmod,Nv+1);  
sigmxtr=zeros(1,Nv+1);  
Jafzzxtr=zeros(Nv+1,Nomega);  
ZETAae_V=zeros(Nmod,Nmod,Nv+1);  
KAPPAae_V=zeros(Nmod,Nmod,Nv+1);  
Sr_z_V=zeros(Nomega,Nv+1);  
H_V=zeros(Nmod,Nmod,Nomega,Nv+1);  
omegaOppd=zeros(1,Nmod);  
  
%% Frekvens-Respons-matrise, H

---

  
omega=linspace(0.0001,7,Nomega);  
  
% Dimensjonsløs frekvensvariabel  
omegaDim=zeros(Nmod,Nmod,Nomega);  
omegaDim(1,1,:)=omega/omegaZ;  
omegaDim(2,2,:)=omega/omegaT;  
omegaDim(3,3,:)=omega/omegaD;  
  
%Startverdier for Kae og Cae  
omegaZv=zeros(1,Nv+1); omegaTv=omegaZv;  
omegaZv(1)=omegaZ; omegaTv(1)=omegaT;  
omegaZitt=omegaZ; omegaTitt=omegaT; omegaZ0=omegaZ; omegaT0=omegaT;
```

```

tel=0;
tell0=1;

for V=Vm %Løkke for middelvindhastighet

    tic
    if V==0 % Kan ikke beregne respons når V=0
        V=10^-3;
    end
    tel=tel+1;
    itt=0; Itt=0;
    err=1;

    % Itterasjoner for å bestemme Kae og Cae
    if ittflag==1
        while err>errlim && itt<maxitt
            [Kae_MOD
Cae_MOD]=AD_funk(omegaZitt,omegaTitt,V,B,rho,IntPhi,ADflag);
            Ktot=K_MOD(1:2,1:2)-Kae_MOD;
            omegav=eig(Ktot,M_MOD(1:2,1:2));
            omegaZitt=sqrt(min(omegav));
            omegaTitt=sqrt(max(omegav));
            err=(abs(omegaTitt-omegaT0))/omegaTitt;
            omegaT0=omegaTitt;
            itt=itt+1;
        end
        omegaZv(tel)=omegaZitt;
        omegaTv(tel)=omegaTitt;
    end
    [Kae_MOD Cae_MOD]=AD_funk(omegaZitt,omegaTitt,V,B,rho,IntPhi,ADflag);

% ZETAae og KAPPAae
ZETAae=0.5*diag([omegaZ omegaT])* (K_MOD(1:2,1:2)\Cae_MOD);
KAPPAae=K_MOD(1:2,1:2)\Kae_MOD;
ZETAae(3,3)=0; %*
KAPPAae(3,3)=0; %*

% Setter opp Frekvens-respons-funksjon
H=zeros(Nmod,Nmod,Nomega); detH=zeros(1,Nomega);
for n=1:Nomega
    omegaDim_n=squeeze(omegaDim(:, :, n));
    E=eye(Nmod) ...
        - KAPPAae - omegaDim_n^2*(eye(Nmod)+MY) ...
        + 2*i*omegaDim_n*(ZETA-ZETAae);
    H(:, :, n)=inv(E);
    detH(n)=abs(det(H(:, :, n)));
end

```

## Vedlegg A: Hovedskript Matlab

```
%% Vindlastspektrum og Joint acceptance function_____
% Pre allocering
SSR=zeros(Nmod,Nmod,Nomega);

% Vind-auto-spektrum
sigmaw=Iw*V;
Sw(tel,:)=sigmaw^2*(Aw*xLw/V)./(1+1.5*Aw*omega*xLw/V).^ (5/3);
%Aw=Aw'/2pi

% Joint acceptance function
J2zz_red=jaf_funk(phiZ,phiZ,x_red,omega,V,Cw,L);
SSR(1,1,:)=(rho*B*V*C1/(2*mZ*omegaZ^2))^2 * Sw(tel,:).*J2zz_red;

J2zt_red=jaf_funk(phiZ,phiT,x_red,omega,V,Cw,L);
SSR(1,2,:)=(rho*B*V/2)^2*C1*B*Cm/(mZ*omegaZ^2*mT*omegaT^2) *
Sw(tel,:).*J2zt_red;
SSR(2,1,:)=SSR(1,2,:);

J2tt_red=jaf_funk(phiT,phiT,x_red,omega,V,Cw,L);
SSR(2,2,:)=(rho*B*V*B*Cm/(2*mT*omegaT^2))^2 * Sw(tel,:).*J2tt_red;

%% Responsspektrum og varians for respons_____
for n=1:Nomega

Sr(:, :, n)=PHIrelXP*abs(conj(H(:, :, n)) *SSR(:, :, n) *H(:, :, n) .') *PHIrelXP.';
end

% Beregne variansen/Integrere over frekvensvariablen
Cov(:, :, tel)=trapz(omega,Sr,3);
Std(:, tel)=sqrt(diag(Cov(:, :, tel)));

%% Oppdatere resonansfrekvens ved skrittvis beregning av Kae og Cae_____
if ittflag==0
for m=1:Nmod
vecHm=squeeze(H(m,m,:)).';
[~, nMax]=max(omega.*abs(vecHm));
omegaOppd(m)=omega(nMax);
end
omegaZitt=omegaOppd(1);
omegaTitt=omegaOppd(2);
omegaZv(tel+1)=omegaZitt;
omegaTv(tel+1)=omegaTitt;
end

%% Lagring av ekstra resultat for plot
sigmxtr(tel)=sigmaw;
Jafzzxtr(tel,:)=J2zz_red;
ZETAae_V(:, :, tel)=ZETAae;
KAPPAae_V(:, :, tel)=KAPPAae;
Sr_z_V(:, tel)=squeeze(Sr(1,1,:));
if lagreFlag==1
H_V(:, :, :, tel)=H;
end
disp(['V=' num2str(V) ',Itt=' num2str(itt) ])

toc
end % Middelvindhastighetsløkke
```

```

%% Lagring av resultat med varierende my
Std_my(:, :, i_my)=Std;
if lagreFlag==1
H_V_my(:, :, :, i_my)=H_V;
end
omega_V_my(1, :, i_my)=omegaZv(1:Nv+1);
omega_V_my(2, :, i_my)=omegaTv(1:Nv+1);
Cov_my(:, :, :, i_my)=Cov;

end % my-variasjonsl kke

%% Lagring av resultat med varierende omegaD (w)
Std_my_w(:, :, :, i_w)=Std_my;
if lagreFlag==1
H_V_my_w(:, :, :, i_w)=H_V_my;
end
omega_V_my_w(:, :, :, i_w)=omega_V_my;
Cov_my_w(:, :, :, i_w)=Cov_my;

end % omegaD-variasjonsl kke

%% Sammenligning av respons med massedemper (midlertidig plot) _____
StdZ=reshape(Std_my(1, :, :), Nv+1, Nmy);
StdT=reshape(Std_my(2, :, :), Nv+1, Nmy);

figure(8)
farge=['b'; 'r'; 'g'; 'b'];
hold on
tekst=cell(size(Std_my,3),1);
for i=1:size(Std_my,3)
plot(Vm, StdT(:, i))%, farge(i))
tekst{i}=['\mu =', num2str(myVektor(i))];
end
hold off
legend(tekst, 'Location', 'NorthWest')
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]'); ylabel('Respons, \sigma_{\theta} [rad]')
str1=['\omega_D=', num2str(omegaD)];
text(2, 0.15, str1)
grid on

figure(9)
farge=['b'; 'r'; 'g'; 'b'];
hold on
tekst=cell(size(Std_my,3),1);
for i=1:size(Std_my,3)
plot(Vm, StdZ(:, i))%, farge(i))
tekst{i}=['\mu =', num2str(myVektor(i))];
end
hold off
legend(tekst, 'Location', 'NorthWest')
xlabel('Middelvindhastighet, V [m/s]'); ylabel('Respons, \sigma_z [m]')
str1=['\omega_D=', num2str(omegaD)];
text(2, 0.15, str1)
grid on

```

## Vedlegg A: Hovedskript Matlab

```

%% Lagre resultatdata til fil_____

if lagreFlag==1
filename2=['Resultater\', Prefix, '_ResultData_', Beskrivelse 'H.mat'];
save(filename2,'H_V_my_w')
end

clear          Std_my      H_V_my      omega_V_my    Cov_my    ...
J2tt_red      SSR         iD          H_V_my_w      ...          ...
AX            J2zt_red     Sr          iP              ...
J2zz_red      Srz_V       i_my       phiT_Sq         ...
              Std         itt          phiXd           ...
              KAPPAae     StdT        m              ...
Cae_MOD              StdZ              phiZT           ...
              KD          Sw          maxitt         phiZ_Sq        ...
Cov            KT_mod     V          my          rho          ...
              KZ_mod     Vm1         n          sigmaw        ...
              Kae_MOD    Vm2         nMax        str1         ...
E              MD        Vm3         Vm4         tekst         ...
H              MT_mod     Vmax          tel          ...
H1             MY         Vplot        omegaDim       tel10         ...
H11            MZ_mod     ZETA        omegaDim_n     vecHm        ...
H2              ZETAae    omegaOppd     xLw          ...
H22              x_redD   ...
H_V            Max        detH         omegaT0        x_redP        ...
i_w              err      omegaTitt      ...
i              errlim    omegaTv        ...
IntPhiT_Sq      farge     omegaZ0        ...
IntPhiZ_T       ftitle    omegaZitt      omegaZv        ...
IntPhiZ_Sq
Itt

```

```

filename=['Resultater\', Prefix, '_ResultData_', Beskrivelse '.mat'];
save(filename)

```





## Vedlegg B: Matlabfunksjon AD\_funk.m

```
function
[Kae_M, Cae_M, ADene, Vr_z, Vr_th]=AD_funk(omegaZ,omegaT,V,B,rho,IntPhi,flag)

% Syntax:
% [Kae_M, Cae_M, ADene, Vr_z,
Vr_th]=AD_funk(omegaZ,omegaT,V,B,rho,IntPhi,flag)
%
% flag=0,1,2      1:Quasi Static 2:Fra fil PpAD.txt
%
% OUTPUT
% Modale matriser, Kae_M og Cae_M, er beregnet etter (Master:2.25)
% der dim.løse AD-matriser er gitt på følgende form:
% Kae_s= [  H4    B*H3;
%          B*A4  B^2*A3]
% Cae_s= [  H1    B*H2;
%          B*A1  B^2*A2]
% Videre beregnes Kae_M= rho*B^2/2*W^2* Kae_s
% og               Cae_M= rho*B^2/2*W*  Cae_s
% ADene, Vr_z, Vr_th er til kontrollplot
%
% INPUT:
% omegaZ og omegaT er funksjoner av V.
% IntPhi er en vektor som inneholder intgralene av PhiZ^2, PhiZ*PhiT og
% PhiT^2

Vr_z=V/omegaZ/B;
Vr_th=V/omegaT/B;
W=[omegaZ 0; 0 omegaT];

if flag==2
    load -ascii PpAD.txt
    ppH1=PpAD(1,:); ppH2=PpAD(2,:); ppH3=PpAD(3,:); ppH4=PpAD(4,:);
ppH5=PpAD(5,:); ppH6=PpAD(6,:);
    ppA1=PpAD(7,:); ppA2=PpAD(8,:); ppA3=PpAD(9,:); ppA4=PpAD(10,:);
ppA5=PpAD(11,:); ppA6=PpAD(12,:);
    clear PpAD
    H1=0; H2=0; H3=0; H4=0; H5=0; H6=0;
    A1=0; A2=0; A3=0; A4=0; A5=0; A6=0;
    for n=1:4,
        aH1=ppH1(n); H1=H1+aH1*Vr_z.^(4-n);
        aH2=ppH2(n); H2=H2+aH2*Vr_z.^(4-n);
        aH3=ppH3(n); H3=H3+aH3*Vr_z.^(4-n);
        aH4=ppH4(n); H4=H4+aH4*Vr_z.^(4-n);
        aH5=ppH5(n); H5=H5+aH5*Vr_z.^(4-n);
        aH6=ppH6(n); H6=H6+aH6*Vr_z.^(4-n);
        aA1=ppA1(n); A1=A1+aA1*Vr_th.^(4-n);
        aA2=ppA2(n); A2=A2+aA2*Vr_th.^(4-n);
        aA3=ppA3(n); A3=A3+aA3*Vr_th.^(4-n);
        aA4=ppA4(n); A4=A4+aA4*Vr_th.^(4-n);
        aA5=ppA5(n); A5=A5+aA5*Vr_th.^(4-n);
        aA6=ppA6(n); A6=A6+aA6*Vr_th.^(4-n);
    end

    Kae_M = rho*B^2/2*W^2*[IntPhi(1)*H4      IntPhi(2)*B*H3;
                          IntPhi(2)*B*A4    IntPhi(3)*B^2*A3];
    Cae_M = rho*B^2/2*W*[IntPhi(1)*H1      IntPhi(2)*B*H2;
                        IntPhi(2)*B*A1    IntPhi(3)*B^2*A2];
```

```

elseif flag==1
    C1=5; Cm=1.5;

    H1=-C1*Vr_z;
    H2=0;
    H3=C1*Vr_z^2;
    H4=0;
    H5=0;
    H6=0;
    A1=-Cm*Vr_th;
    A2=-Cm*0.2*Vr_th^2;
    A3=Cm*Vr_th^2;
    A4=0;
    A5=0;
    A6=0;

    Kae_M = rho*B^2/2*W.^2*[IntPhi(1)*H4      IntPhi(2)*B*H3;
                           IntPhi(2)*B*A4      IntPhi(3)*B^2*A3];
    Cae_M = rho*B^2/2*W*[IntPhi(1)*H1      IntPhi(2)*B*H2;
                        IntPhi(2)*B*A1      IntPhi(3)*B^2*A2];

else
    H1=0;
    H2=0;
    H3=0;
    H4=0;
    H5=0;
    H6=0;
    A1=0;
    A2=0;
    A3=0;
    A4=0;
    A5=0;
    A6=0;

    Kae_M = zeros(2);
    Cae_M = zeros(2);
end

ADene=[H1 H2 H3 H4 H5 H6 A1 A2 A3 A4 A5 A6]';

```

## Vedlegg C: Matlabfunksjon jaf\_funk.m

```
function [Jaf_red,Jaf]=jaf_funk(phi_i,phi_j,x_red,omega,V,c,L)

%Beregner redusert Joint-acceptance-function,  $J^2(\omega)$ 
%Jaf_red må multipliseres med  $(L_{exp}/L)^2$  hvis  $L_{exp}$  og  $L$  er forskjellig.
%
%[Jaf_red,IntJ]=jaf_funk(phi_i,phi_j,x_red,omega,V,c,L)
%
%Input:
%phi_i/j er svingeformene (z eller theta) med redusert x-variabel, [1xNx]
%x_red er redusert x-variabel, konstant avstand dx. [1xNx]
%omega er frekvensvariabelen. [1xNw]
%V er middelvindhastighet
%c er koefisient i redusert Co-spektrum. Merk  $c=C/2\pi$ 
%L er vindeksponert lengde
%
%OutPut:
%Jaf_red er  $J^2$  redusert med IntPhiSq

Nx=length(x_red);
Nw=length(omega);

%integralet av kvadratet av svingeformene
phi_iSq=phi_i.^2;
phi_jSq=phi_j.^2;
IntPhi_iSq=trapz(x_red, phi_iSq);
IntPhi_jSq=trapz(x_red, phi_jSq);

%integralet av joint-acceptance-function
IntJ=zeros(1,Nw);
%tic
for n=1:Nw
    w=omega(n);
    beta=c*w*L/V;
    IntJn=0;
    for i=1:Nx
        xi=x_red(i);
        phi_ixi=phi_i(i);
        for j=1:Nx
            dx=abs(x_red(j)-xi);
            temp=phi_ixi*phi_j(j)*exp(-beta*dx);
            IntJn=IntJn+temp;
        end
    end
    IntJ(n)=IntJn;
end
%toc
Jaf=IntJ/Nx^2;

Jaf_red=Jaf/(IntPhi_iSq*IntPhi_jSq);
```



## Vedlegg D: Matlabfunksjon phi\_funk.m

```
function [Phi_i, Phi_j, x_red]=phi_funk(i,j,Nx)

% Svingeformer basert på fourierkoefisienter
x_red=linspace(0,1,Nx)';

load -ascii AA.txt
aa_i=AA(i,:); aa_j=AA(j,:); K=length(aa_i);
clear AA

Phi_i=zeros(Nx,1); Phi_j=zeros(Nx,1);
for k=1:K,
    Phi_i=Phi_i+aa_i(k)*sin(k*pi*x_red);
    Phi_j=Phi_j+aa_j(k)*sin(k*pi*x_red);
end
```